確率統計☆演習 I プチテスト

樋口さぶろお[1] 配布: 2018-11-21 水 更新: Time-stamp: "2019-11-10 Sun 18:48 JST hig"

プチテスト参加案内

1. 指定された用紙に解答しよう.
2. 過程も答えよう. 最終的な答えが正しいことがわかるような過程を記そう.
3. 問題文に現れない記号を使うときは, 定義を記そう.

1

結果のみ, 過程不要

次のうち, 正しいものに ○, 正しくないものに × を答えよう.

1. ある会社の健康診断の血液検査の結果から, 2 つの化学物質 x,y の濃度を取り出して, 2 変量データ (X, Y) を作ったところ, X と Y の相関係数は 1 に近かった. これは, 社員に x を注射してしばらく待つと y の濃度も上がることを意味する.
2. 平均値はヒストグラムが板だと思ったときの横方向の重心の位置に一致する.
3. 分散はヒストグラムが板だと思ったときの横方向の実質的な '幅' に比例する.
4. 2 変量データ (X, Y) が, ある関数に対して $Y = u(X)$ に従うとき, (X, Y) の相関関数の絶対値は 1 に近い.

2

結果のみ, 過程不要

次のうち, 正しいものに ○, 正しくないものに × を答えよう.

1. 確率変数 X に対して, つねに $\mathrm{V}[X] \geq 0$ が成立する.
2. 連続型確率変数 X が確率密度関数 $f(x)$ を持つとき, $f(\mathrm{E}[X]) > 0$ である
3. 連続型確率変数 X が確率密度関数 $f(x)$ を持つとき, $W = aX$ ($a > 1$ は定数) の確率密度関数のグラフは, $f(x)$ のグラフを横方向, 縦方向とも a 倍に拡大したものである.
4. 連続型確率変数 X の確率密度関数 $f(x)$ は $0 \leq f(x) \leq 1$ を満たす.

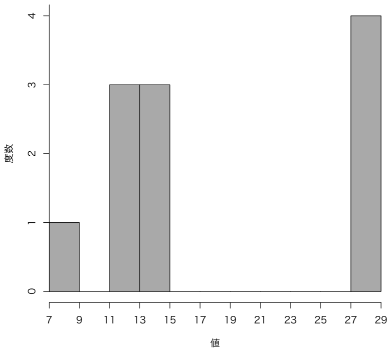
hig@math.ryukoku.ac.jp, http://hig3.net(講義のページもここからたどれます), へや:1 号館 5 階 502

3

結果のみ, 過程不要

次の代表値を, 下のヒストグラムから求めよう. ただし, 階級値で近似すること.

1. 中央値
2. (ヒストグラムの) 最頻値
3. 平均値



4

結果のみ, 過程不要

確率変数 X, Y に関する次の等式について, 常に正しいものは D, X と Y が独立なときは正しい (そして常に正しいわけではない) ものに I, 正しくないものに X と答えよう.

1. $\mathrm{V}[X+X+Y+2] = \mathrm{V}[X] + \mathrm{V}[X] + \mathrm{V}[Y]$.
2. $\mathrm{E}[X+X+Y+2] = \mathrm{E}[X] + \mathrm{E}[X] + \mathrm{E}[Y] + 2$.
3. $\mathrm{E}[(X+3)(Y+4)] = \mathrm{E}[X+3]\mathrm{E}[Y+4]$.
4. $\mathrm{E}[\mathrm{e}^{X+2Y}] = \mathrm{e}^{\mathrm{E}[X]+2\mathrm{E}[Y]}$.

5

結果のみ, 過程不要

確率変数 X は確率密度関数

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{18\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{1}{18}(x^2+8x+16)}$$

を持つ.

1. 母平均値 $\mathrm{E}[X]$ を求めよう.
2. 母分散 $\mathrm{V}[X]$ を求めよう.
3. 母期待値 $\mathrm{E}[X^2-3X+1]$ を求めよう.

6

結果のみ，過程不要

あるクラスの第 1 回テストは 100 点満点で，平均点 80 点，標準偏差 20 点だった．クラスの 1 人である A 君の点数は 90 点だった．

同じクラスの第 2 回テストは 200 点満点で，平均点 150 点，標準偏差 10 点だった．A 君の点数は 160 点だった．

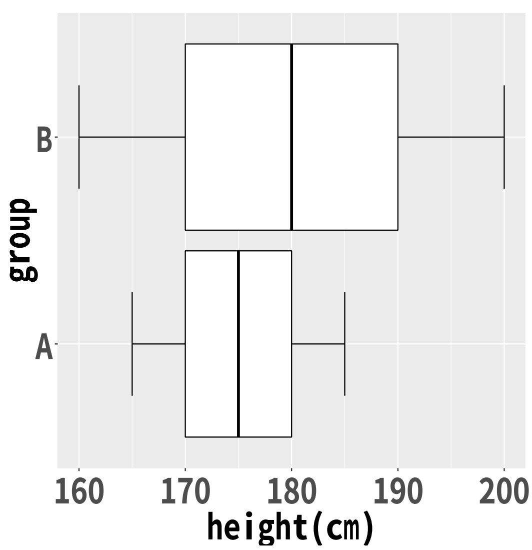
1. 第 1 回テストでの A 君の点数の標準得点 (z スコア) を求めよう．
2. 第 1 回テストでの A 君の点数の偏差値を求めよう．
3. A 君の第 1 回テストと第 2 回テストの点数を比べると，クラス内の相対評価として，どちらのほうがよい成績か．理由とともに答えよう．
4. 第 2 回のテストの B 君の点数の偏差値は 20 だったという．第 2 回のテストの B 君の点数を求めよう．

7

結果のみ，過程不要

8000 人からなる group A と，2000 人からなる group B の身長 (cm) を測定して箱ひげ図に表したものが次である．

1. group A を身長の大きい方から小さい方に並べたとき，6000 位 (くらい) の人の身長を答えよう．
2. group B を身長の大きい方から小さい方に並べたとき，500 位 (くらい) の人の身長を答えよう．
3. group A で身長が 170cm 以上 175cm 未満の人の人数は，group B で身長が 170cm 以上 190cm 未満の人の人数の何倍か．小数で答えよう．



8

要過程

ある 2 変量データ (x, y) について次のことがわかっている.

x の平均値 $\overline{x}$	36
y の平均値 $\overline{y}$	-64
x の分散 s_x^2	25
y の分散 s_y^2	16
x, y の共分散 s_{xy}	-9
(x, y) のデータの個数 n	49

また, 量 $w = -10y + 2$ を考える. 次の問に答えよう. 答は分数でも小数でもよく, 約分や整理をしていなくてもよい.

1. x と y の相関係数 r_{xy} を求めよう.
2. y を目的変数 (従属変数), x を説明変数 (独立変数) として (=授業と同じのりで) 回帰分析を行い, 回帰直線の式を求め, $x = 46$ に対する y の値を予想しよう.
3. x と w の相関係数 r_{xw} を求めよう.
4. y と w の相関係数 r_{yw} を求めよう.

9

要過程

独立な確率変数 X, Y について, $\mathrm{E}[X] = 3, \mathrm{E}[X^2] = 16, \mathrm{E}[Y] = 10, \mathrm{E}[Y^2] = 144$ が成立する. 次の量を求めよう.

1. $\mathrm{V}[2X - Y + 3]$
2. $\mathrm{Cov}[X, Y]$

10

要過程

離散型確率変数 X の確率分布 $f(x)$ は次で与えられる.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3} & (x = -1) \\ \frac{2}{3} & (x = +1) \\ 0 & (\text{他}) \end{cases}$$

1. 母期待値 $\mathrm{E}[X^2 + 2X + 1]$ を求めよう.
2. 母分散 $\mathrm{V}[X]$ を求めよう.
3. 確率 $P(X^{20} + 2X^9 + 1 = 0)$ を求めよう.

11

$\boxed{\text{要過程}}$
連続型確率変数 X の確率密度関数 $f(x)$ は次で与えられる.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{2^6} \cdot x^2 & (-4 \leq x < 0) \\ 0 & (\text{他}) \end{cases}$$

1. 母分散 $\mathrm{V}[X]$ を求めよう.
2. 母期待値 $\mathrm{E}[5X^2 + 4X + 3]$ を求めよう.
3. 確率 $P(|X|^3 < 2)$ を求めよう. 多項式関数の定積分の形のままで答えてもよいし, 整理して答えてもよい.

12

$\boxed{\text{要過程}}$
確率変数 Z は標準正規分布 $\mathrm{N}(0, 1^2)$ にしたがう. 標準正規分布の上側確率を $Q(z) = P(Z > z)$ とする. 以下の量を, $Q(z)$ ただし, $0 < z < +\infty$ で表そう.

1. 確率 $P(0 < Z < 3)$
2. 確率 $P(-4 < Z < 5)$
3. 確率 $P(Z > -7)$

13

$\boxed{\text{要過程}}$
連続型確率変数 X の確率密度関数 $f(x)$ は次で与えられる.

$$f(x) = \begin{cases} 3 & (\frac{2}{3} \leq x < 1) \\ 0 & (\text{他}) \end{cases}$$

1. 母期待値 $\mathrm{E}[\cos(\pi X)]$ を求めよう.
2. 確率 $P(|X| < \frac{3}{4})$ を求めよう.

確率統計☆演習 I プチテスト略解

樋口さぶろお[2] 配布: 2018-11-21 水更新: Time-stamp: "2019-11-10 Sun 18:48 JST hig"

これは, 一部の過程のみ記した略解です. 参加者はすべての過程を記す必要があります.

配点　計 100 点.

1

1. × 相関は因果関係を意味しない
2. ○
3. × 分散は幅の 2 乗に比例する. 標準偏差は幅の 1 乗に比例する.
4. × 関係は相関を意味しない. 例. $u(X) = |X|$ で $X > 0$, $X < 0$ に対称に分布.

2

1. ○ $\mathrm{V}[X] = \mathrm{E}[(X-\mu)^2]$. 0 以上のものの期待値は 0 以上.
2. × 反例 $f(x) = |x|$ $(-1 < x < 1)$.
3. × 全確率 $\mathrm{E}[1]$ が a^2 倍になるのでおかしい. 縦は $1/a$ が正しい.
4. × 反例 $f(x) = 2x$ $(0 < x < 1)$.

3

$N = 11.$

1. 中央値 $Q_2 = x_5$. よって階級 13–15 に含まれる. 階級値を答えて, 14.
2. 階級値を答えて, 28.
3. 階級値で近似して, $\frac{1}{11}(8 \cdot 1 + 12 \cdot 3 + 14 \cdot 3 + 28 \cdot 4) = 18$. (たまたま階級値になっていた).

4

- X 正しい等式は $\mathrm{V}[2X + Y + 2] = \mathrm{V}[2X] + \mathrm{V}[Y] = 2^2\mathrm{V}[X] + \mathrm{V}[Y]$.
- D 和の期待値は期待値の和.
- I X, Y が独立なら, $X + 3, Y + 4$ も独立で (表を想像してみて), 成立する.
- X 一般に $\mathrm{E}[u(X)] \neq u(\mathrm{E}[X])$.

hig@math.ryukoku.ac.jp, http://hig3.net(講義のページもここからたどれます), へや:1 号館 5 階 502.

5

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \cdot 3^2}} \mathrm{e}^{-\frac{(x-(-4))^2}{2\cdot 3^2}}$$

より, $X \sim \mathrm{N}(-4, 3^2)$.

1. 母平均値 $\mathrm{E}[X] = -4$.
2. 母分散 $\mathrm{V}[X] = 3^2$
3. 母期待値 $\mathrm{E}[X^2-3X+1] = (\mathrm{V}[X]+\mathrm{E}^2)-3\mathrm{E}[X]+1 = (3^2+(-4)^2)-3(-4)+1 = 38$.

6

1. 標準得点 $z = (90-80)/20 = 0.5$.
2. 偏差値 $w = z \times 10 + 50 = 55$.
3. 2 回目のテストの標準得点は 1, 偏差値は 60. 1 回目より 2 回目のほうが大きいので, 2 回目のほうがよい成績である.
   別解: 平均点との差がは 1 回目と 2 回目で同じ正の値で, 標準偏差は 2 回目のほうが小さいので, 2 回目のほうがよい成績である.
4. $50 + \frac{x-150}{10} \times 10 = 20$ より, $x = 120$ 点.

7

1. $6000/8000 = 3/4$. 第 3 四分位数を答えて, 170cm.
2. $500/2000 = 1/4$. 第 1 四分位数を答えて, 190cm.
3. group A で身長が 170cm 以上 175cm 未満の人は $8000 \times 1/4 = 2000$ 人. group B で身長が 170cm 以上 190cm 未満の人は $2000 \times 1/2 = 1000$ 人. よって, 2.0 倍.

8

1. $r_{xy} = \frac{s_{xy}}{s_x s_y} = \frac{-9}{5\cdot 4} = -0.45$.
2. 回帰直線の式は $y = \frac{-9}{20} \cdot \frac{4}{5}(x-36) - 64 = -\frac{36}{100}x - \frac{5104}{100}$. $x = 46$ に対して, $y = -3.6 - 64 = -67.6$.
3. $r_{xw} = \frac{s_{xw}}{s_x s_w} = \frac{-10 s_{xy}}{s_x |-10| s_y} = +0.45$.
4. y, w の散布図を描くと, 傾きが負の一直線上にのるので, $r_{yw} = -1$.

9

1. $\mathrm{V}[2X-Y+3] \overset{独立}{=} \mathrm{V}[2X] + \mathrm{V}[-Y] = 2^2\mathrm{V}[X] + (-1)^2\mathrm{V}[Y] = 2^2(\mathrm{E}[X^2]-\mathrm{E}[X]^2) + (-1)^2(\mathrm{E}[Y^2]-\mathrm{E}[Y]^2) = 72$. だいぶ面倒だが $\mathrm{E}[(2X-Y)^2] - \mathrm{E}[(2X-Y)]^2$ を $\mathrm{E}[XY] \overset{独立}{=} \mathrm{E}[X]\mathrm{E}[Y]$ を使って計算しても求められる.
2. $\mathrm{Cov}[X,Y] = \mathrm{E}[XY] - \mathrm{E}[X]\mathrm{E}[Y] \overset{独立}{=} 0$.

10

1. $\mathrm{E}[X^2] = (-1)^2\frac{1}{3} + (+1)^2\frac{2}{3} = 1$. $\mathrm{E}[X] = (-1)\frac{1}{3} + (+1)\frac{2}{3} = \frac{1}{3}$. $\mathrm{E}[X^2 + 2X + 1] = 1 + \frac{2}{3} + 1 = \frac{8}{3}$.
2. $\mathrm{V}[X] = \mathrm{E}[X^2] - \mathrm{E}[X]^2 = \frac{8}{9}$.
3. $P(X^{20} + 2X^9 + 1 = 0) = \mathrm{E}[\mathrm{I}_{[X^{20}+2X^9+1=0]}(X)] = 1 \cdot \frac{1}{3} + 0 \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$.

11

1. $\mathrm{E}[X] = \int_{-3}^{0} x \cdot \frac{3}{2^6} \cdot x^2 \ \mathrm{d}x = -3$, $\mathrm{E}[X^2] = \int_{-3}^{0} x^2 \cdot \frac{3}{2^6} \cdot x^2 \ \mathrm{d}x = \frac{48}{5}$. $\mathrm{V}[X] = \mathrm{E}[X^2] - \mathrm{E}[X]^2 = \frac{3}{5}$.
2. $\mathrm{E}[5X^2 + 4X + 3] = 5\mathrm{E}[X^2] + 4\mathrm{E}[X] + 3 = \frac{48}{5} + 4 \cdot (-3) + 3 = 39$.
3. $P(|X|^3 < 2) = \mathrm{E}[\mathrm{I}_{[|X|^3<2]}(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \times \mathrm{I}_{[|X|<2^{1/3}]}(x) \ \mathrm{d}x = \int_{-2^{1/3}}^{0} \frac{3}{2^6}x^2 \ \mathrm{d}x = 2^{-5}$.

$\mathrm{E}[X^2], \mathrm{E}[X]$ は 1,2 の 2 個所で必要になるのだから，まず部品として求めておく．
2 第 3 項で，1 になるとわかっている $\mathrm{E}[1] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\ \mathrm{d}x$ を手で計算するのは疲れる．
1 でつねに $\mathrm{V}[X] \geq 0$，3 でつねに $0 \leq P \leq 1$ が成立するのだから，そうでない答がでたら見直そう．
この問では $X \leq 0$ だから $\mathrm{E}[X] < 0$. そうでない答がでたら見直そう．

12

1. 確率 $P(0 < Z < 3) = Q(0) - Q(3) = \frac{1}{2} - Q(3)$.
2. 確率 $P(-4 < Z < 5) = Q(-4) - Q(5) = 1 - Q(4) - Q(5)$.
3. 確率 $P(Z > -7) = P(-7 < Z < +\infty) = Q(-7) - Q(+\infty) = 1 - Q(7)$.

13

1. $\mathrm{E}[\cos(\pi X)] = \displaystyle\int_{2/3}^{1} 3\cos(\pi x)\ \mathrm{d}x = -\frac{3\sqrt{3}}{2\pi}$.
2. $P(|X| < \dfrac{3}{4}) = \mathrm{E}[\mathrm{I}_{[-\frac{3}{4}<X<\frac{3}{4}]}(X)] = \displaystyle\int_{2/3}^{3/4} 3\ \mathrm{d}x = \frac{1}{4}$.