確率統計☆演習 I ファイナルトライアル

樋口さぶろお[1]　配布: 2019-01-23 水　更新: Time-stamp: "2019-02-08 Fri 08:14 JST hig"

ファイナルトライアル参加案内

1. 指定された用紙に解答しよう.
2. 過程も答えよう. 最終的な答えが正しいことがわかるような過程を記そう (**過程不要** の問を除く).
3. 問題文に現れない記号を使うときは, 定義を記そう.
4. **整理不要** の問は, 加減乗除平方根べき乗 a^b 階乗 $n!$ の残った未整理の形で答えてよい. 約分したり小数に直したりしなくてよい.
5. 別に配布する数表を利用してよい. 数表の紙に記入したものは採点対象にならない.

1

過程不要

標本抽出と推定について, 正しい文に○, 間違った文に×をつけよう.

1. 母平均値は, 標本平均値の推定値である.
2. 標本平均値は, 一般に, 標本抽出のたびに変化する
3. 不偏標本分散は, 母分散の推定値であり, 両者は必ずしも等しいわけではない
4. 標本平均値は, 一般に, 母平均値に等しい
5. 母分布 (母集団) が与えられたとき, 一般に, 標本のサイズは定まっている

2

過程不要 **整理不要**

400 人の学年のうち, 何人が運転免許を持っているか知るために, 20 人に質問したところ 8 人が運転免許を持っていた. 運転免許を持っている人の母比率 p を, 信頼係数 $1-\alpha=0.99$ で区間推定しよう.

hig@math.ryukoku.ac.jp, http://hig3.net(講義のページもここからたどれます), へや:1 号館 5 階 502

3

離散型確率変数 X の確率分布は

$$f(x) = \begin{cases} \frac{4}{10} & (x = 1) \\ \frac{3}{10} & (x = 2) \\ \frac{2}{10} & (x = 3) \\ \frac{1}{10} & (x = 4) \\ 0 & (\text{他}) \end{cases}$$

で与えられる.

1. 母期待値 $\mathrm{E}[10^X]$ を求めよう.
2. 確率 $P(X^3 + X \leq 10)$ を求めよう.

4

連続型確率変数 X は次の確率密度関数 $f(x)$ を持つ.

$$f(x) = \begin{cases} x^3 & (0 \leq x < \sqrt{2}) \\ 0 & (\text{他}) \end{cases}$$

1. 母分散 $\mathrm{V}[X]$ を求めよう.
2. 確率 $P(X^2 > 1)$ を求めよう.

5

確率変数 X は母平均値 5, 母分散 3^2 の正規分布 $\mathrm{N}(5, 3^2)$ にしたがう.

1. 確率 $P(-1 < X < 11)$ を, 適当な $A, B, G(x)$ を選んで, $\int_A^B G(x)\,\mathrm{d}x$ の形に加減乗除や巾乗や平方根や三角関数や指数関数を使って具体的に書こう. 書き方は 1 つではないが, 1 つだけ答えればよい.
2. 確率 $P(2 < X < 5)$ を, 標準正規分布 $\mathrm{N}(0, 1^2)$ の上側確率 $Q(z)$ ただし $0 < z < +\infty$ で表そう.

6

表が確率 $\frac{4}{5}$, 裏が確率 $\frac{1}{5}$ ででるコインを, 400 回投げるとき, 表がでる回数を確率変数 X とする.

1. X のしたがう分布を $\mathrm{A}(B, C)$ のような記号または相当する日本語で答えよう.
2. 確率 $P(X \geq 340)$ を, 回数 400 が十分に大きいと考えて近似的に求めて, 標準正規分布の上側確率 $Q(z)$ ただし $0 < z < +\infty$ で表そう.

7

整理不要

あるくじは,「あたり」と「はずれ」の 2 種類の結果だけがある.
「あたり」の確率は 0.3,「はずれ」の確率は 0.7 である.
「あたり」の賞金は 320 円,「はずれ」の賞金は 20 円である.
このくじを 10 回ひくときの合計賞金を考える.

1. 合計賞金の 2600 円である確率を求めよう.
2. 合計賞金の母平均値を求めよう.
3. 合計賞金の母分散を求めよう.

8

過程不要

$X_1, X_2, \cdots, X_n$ を独立同分布にしたがう確率変数とする. $\mathrm{E}[X_i] = \mu, \mathrm{V}[X_i] = \sigma^2$ とおく ($i = 1, \ldots, n$). 次の量を n, μ, σ^2 で表そう.

1. $\mathrm{E}[X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n]$
2. $\mathrm{V}[X_1 + \cdots + X_n - n\mu]$
3. $\mathrm{E}[\frac{1}{n}(X_1 + \cdots + X_n)]$
4. $\mathrm{V}[\frac{1}{n}(X_1 + \cdots + X_n)]$

9

過程不要 **整理不要**

あるファミレスのアイスクリームの重さ X(g) は, 母平均値 μ(g) と母分散 σ^2(g^2) の正規分布にしたがう.
$n = 6$ 個注文してみたところ, 重さ (g) は,

$$100, \quad 100, \quad 102, \quad 98, \quad 104, \quad 96$$

だった. ここから標本平均値を求めたところ $\overline{X} = 100\mathrm{g}$ だった.

1. 重さの母分散を点推定して,「母分散」を含む完全な日本語の文で答えよう.
2. 重さの母平均値を区間推定して, 信頼係数 $1 - \alpha = 0.99$ の信頼区間を求めよう.

10

過程不要

あるスピードくじ (「あたり」と「はずれ」だけがある) は, くじ全体の本数が 10000 本, あたりが 1000 本と公表されている. しかし, 実際のあたりの本数 h はそれより少ないという説があり, これを実証するために, サイズ 20 の標本を抽出して検定を行うことにした.

1. 行うべき検定の名前を書こう.
2. 帰無仮説を書こう.
3. 対立仮説を書こう.
4. 帰無仮説が棄却できなかったときの検定の結果「あたりの本数は…」を書こう.

11

過程不要

ある鳥の卵の重さは正規分布に従うことがわかっており, その母平均値は $20\mathrm{g}$ だという説がある. この説が間違っていることを示すため, 標本を抽出して, t 検定を行う.

鳥 16 羽を捕獲して調べたところ, 標本平均値が $22\mathrm{g}$, 不偏標本分散が $25\mathrm{g}^2$ だった.

1. t 分布にしたがう検定統計量 T の, この標本に対する値を求めよう.
2. 有意水準 $\alpha = 0.05$ での t 検定の棄却の境い目の t の値を答えよう.
3. 検定の結論を「(上の 2 つの量の大小関係)…が成立するので, 帰無仮説を…. よって卵の重さ….」 の形で書こう.

12

過程不要

あるファーストフードチェーンのポテトフライ S の重さ (重さは正規分布にしたがうと仮定する) は, 母分散が $4\mathrm{g}^2$ であることが定められているという. あるトレーニング中のアルバイトの人の作るポテトフライ S について, 母分散はこれより大きいことを主張するため, 有意水準 $\alpha = 0.05$ で, 母分散のカイ二乗検定を行う.

- 10 個のポテトからなる標本から, カイ二乗分布にしたがう検定統計量 Y の値を計算したところ 20.0 だった (答え不要).

1. 有意水準 $\alpha = 0.05$ での片側カイ二乗検定の棄却の境い目の χ^2 の値を答えよう.
2. 検定の結果を「(上の 2 つの量の大小関係)…が成立するので, 帰無仮説を…. よってアルバイトの母分散….」 の形で書こう.

確率統計☆演習 I ファイナルトライアル略解

樋口さぶろお[2]　配布: 2019-01-23 水更新: Time-stamp: "2019-02-08 Fri 08:14 JST hig"

これは, 一部の過程のみ記した略解です. 参加者はすべての過程を記す必要があります.

配点　各問配点ばらばら, 計 100 点.

1

×, ◯, ◯, ×, ×

2

標本サイズは $n=20$. 標本比率は $\hat{p}=\frac{8}{20}=0.4$.

$$0.4-2.58\times\sqrt{\tfrac{1}{20}\cdot 0.4\cdot(1-0.4)}<p<0.4+2.58\times\sqrt{\tfrac{1}{20}\cdot 0.4\cdot(1-0.4)}.$$

3

1. $\mathrm{E}[10^X]=10^1\cdot\frac{4}{10}+\cdots=1234.$
2. $P(X^3+X\leq 10)=\mathrm{E}[\mathrm{I}_{[X^3+X\leq 10]}(X)]=1\cdot\frac{4}{10}+1\cdot\frac{3}{10}+0\cdot\frac{2}{10}+0\cdot\frac{1}{10}=\frac{7}{10}.$

4

1. $\mathrm{E}[X]=\int_0^{\sqrt{2}}x^3\,\mathrm{d}x=\frac{4}{5}\sqrt{2}.$ $\mathrm{E}[X^2]=\int_0^{\sqrt{2}}x^3\,\mathrm{d}x=\frac{4}{3}.$ $\mathrm{V}[X]=\mathrm{E}[X^2]-\mathrm{E}[X]^2=\frac{4}{75}.$
2. $P(X^2>1)=\mathrm{E}[\mathrm{I}_{[X<-1\text{ or }1<X]}(X)]=\int_1^{\sqrt{2}}x^3\,\mathrm{d}x=\frac{3}{4}.$

hig@math.ryukoku.ac.jp, http://hig3.net(講義のページもここからたどれます), へや:1 号館 5 階 502.

5

1. 正規分布の定義より $P(-1 < X < 11) = \int_{-1}^{11} \frac{1}{\sqrt{2\pi \cdot 3^2}} \mathrm{e}^{-\frac{(x-5)^2}{2\cdot 3^2}}\ \mathrm{d}x$.
   2. の標準化を行った，$P(-1 < X < 11) = P(-2 < Z < 2) = \int_{-2}^{+2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{z^2}{2}}\ \mathrm{d}z = 2\int_0^{+2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{z^2}{2}}\ \mathrm{d}z$ も正解．変数変換で無数の表示が作れる．
2. $Z = \frac{X-5}{3}$ とおくと，Z は標準正規分布 $\mathrm{N}(0, 1^2)$ にしたがう．よって，$P(2 < X < 5) = P(-1 < Z < 0) = Q(-1) - Q(0) = 1 - Q(1) - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - Q(1)$.

6

1. 表の出る回数 X は，二項分布 $\mathrm{B}(400, \frac{4}{5})$ にしたがう．
2. よって $\mathrm{E}[X] = 400 \cdot \frac{4}{5} = 320$, $\mathrm{V}[X] = 400 \cdot \frac{1}{5}\frac{4}{5} = 64$. 中心極限定理より，$X$ は近似的に正規分布 $\mathrm{N}(320, 8^2)$ にしたがう (数学的に正確ではない言い方)．$Z = \frac{X-320}{8}$ は近似的に標準正規分布にしたがう．よって，$P(X \geq 340) = P(Z \geq \frac{20}{8}) = P(2.5 \leq Z < +\infty) = Q(2.5) - Q(\infty) = Q(2.5)$.

7

1. あたりの回数を X とすると，$X \sim \mathrm{B}(10, 0.3)$．賞金の合計額を Y とすると，$Y = X \times 320 + (10 - X) \times 20 = 300X + 200$. $P(Y = 2600) = P(X = 8) = \frac{10!}{8!2!} \cdot 0.3^8 \cdot 0.7^2$.
2. $\mathrm{E}[Y] = \mathrm{E}[300X + 200] = 300\mathrm{E}[X] + 200 = 300 \cdot 10 \cdot 0.3 + 200 = 1100$ 円.
3. $\mathrm{V}[Y] = \mathrm{V}[300X + 200] = 300^2 \mathrm{V}[X] = 300^2 \times 10 \times 0.3 \times 0.7 = 189000$ 円^2.

8

1. $\mathrm{E}[X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n] \overset{\text{独立}}{=} \mathrm{E}[X_1] \times \cdots \times \mathrm{E}[X_n] \overset{\text{同分布}}{=} \mu^n$.
2. $\mathrm{V}[X_1 + \cdots + X_n - n\mu] \overset{\text{母分散の性質}}{=} \mathrm{V}[X_1 + \cdots + X_n] \overset{\text{独立}}{=} \mathrm{V}[X_1] + \cdots + \mathrm{V}[X_n] \overset{\text{同分布}}{=} n\sigma^2$.
3. $\mathrm{E}[\frac{1}{n}(X_1 + X_2 + \cdots + X_n)] \overset{\text{母期待値の線形性}}{=} \frac{1}{n}(\mathrm{E}[X_1] + \cdots + \mathrm{E}[X_n]) \overset{\text{同分布}}{=} \mu$.
4. $\mathrm{V}[\frac{1}{n}(X_1 + \cdots + X_n)] \overset{\text{母分散の性質}}{=} \frac{1}{n^2}\mathrm{V}[X_1 + \cdots + X_n] \overset{\text{独立同分布}}{=} \frac{1}{n^2} \times n\sigma^2 = \sigma^2/n$.

9

1. 標本サイズは $n = 6$. 標本平均値は $\overline{X} = 100\mathrm{g}$. 不偏標本分散は $s^2 = \frac{1}{6-1}(0^2 + 0^2 + 2^2 + 2^2 + 4^2 + 4^2) = 8\mathrm{g}^2$. 母分散を $8\ \mathrm{g}^2$ と推定する.
2. 母平均値を $\mu\mathrm{g}$ とすると,

$$
\begin{aligned}
100 - \chi^2(5; 0.01/2) \times \sqrt{8/6} <& \mu < 100 + \chi^2(5; 0.01/2) \times \sqrt{8/6} \\
100 - 4.032 \times \sqrt{8/6} <& \mu < 100 + 4.032 \times \sqrt{8/6}.
\end{aligned}
$$

10

1. 母比率の片側二項検定 (を近似した片側正規検定). (片側 Z 検定, 片側正規検定, 片側 t 検定, 片側カイ二乗検定などでも不正解とは言い切れない. 以下の小問の答と整合的なら正解にしています).
2. あたりの母比率 $p = \frac{1000}{10000}$.
3. あたりの母比率 $p < \frac{1000}{10000}$.
4. あたりの本数は 1000 本より少ないとは言えない.

11

1. $T = \frac{22-20}{\sqrt{25/16}} = 1.6$.
2. T は自由度 $k = n-1 = 16-1$ の t 分布にしたがうので, 境い目は $t(16-1; 0.05/2) = 2.131$.
3. $|1.6| < 2.131$ が成立するので, 帰無仮説を棄却できない. よって, 鳥の卵の重さの母平均値が $20\mathrm{g}$ と異なるとは結論できない.

12

-

1. 自由度は $n-1=10-1$ で, 上側の片側検定なので, $\chi^2(10-1;0.05)=16.919$.
2. $20.0>16.919$ が成立するので, 帰無仮説を棄却する．アルバイトの作るポテトの重さの母分散は $4\mathrm{g}^2$ より大きいと結論する.