

# 離散型確率変数

樋口さぶろお <http://hig3.net>

龍谷大学工学部数理情報学科

確率統計☆演習 I L05(2018-10-24 Wed)

最終更新: Time-stamp: "2018-10-24 Wed 07:22 JST hig"

## 今日の目標

- 離散型確率変数とは何か説明できる
- 離散型確率変数の確率, 母平均値, 母分散, 母標準偏差, 母期待値が計算できる



## ここまで来たよ

4 略解:回帰分析

5 離散型確率変数

- 事象と確率
- 離散型確率変数
- 母期待値・母平均値・母分散・母標準偏差

## 高校の確率

## 高校数学でありがちな問題

トランプを1枚引く

結果	確率
♥1	$\frac{1}{52}$
♥2	$\frac{1}{52}$
⋮	⋮
♠13	$\frac{1}{52}$
計	1

偶数のカードの確率は?  $\frac{24}{52}$ .

## 事象と確率

高校 数学 A

前編 確率統計 §1.1

集合の言葉で.

集合位相

試行 (トランプから 1 枚引く) を行うと **根源事象** ( $\heartsuit 1$  がでる) のどれか 1 つが起きる.

**標本空間**  $\Omega = \{\heartsuit 1, \dots, \spadesuit K\}$  すべての根源事象を集めた集合.

**事象** 部分集合  $A = \{\text{カード } 1, \text{カード } 2, \dots\} = \{\text{カード } x \mid \text{条件 } a(x)\} \subset \Omega.$

**全事象**  $\Omega \subset \Omega.$

**空事象**  $\emptyset \subset \Omega.$

**補事象**  $A^c = \Omega \setminus A.$   $A$  が起きなかったという事象.

**和事象**  $A \cup B$  'または'.

**積事象**  $A \cap B$  'かつ'.

**排反事象** 「 $A, B$  が排反事象」  $\Leftrightarrow A \cap B = \emptyset.$  同時に起きない.

## 事象の確率

「事象  $A$  の確率」  $= P(A) =$  「条件  $a(X)$  が成立する確率」  $= P(a(X))$

$\Omega =$ (トランプ全体) のとき,

- $P(\{\heartsuit 1, \dots, \heartsuit K\}) = P(X \text{ が } \heartsuit) = (\heartsuit \text{ がでる確率})$
- $P(\{\heartsuit 1\}) = P(X \text{ が } \heartsuit 1) = (\heartsuit 1 \text{ がでる確率})$
- $P(\{\clubsuit 1, \dots, \clubsuit K, \spadesuit 1, \dots, \spadesuit K\}) = P(X \text{ が黒札}) = (X \text{ 黒札がでる確率})$

授業時間中にはやらないこと

- 確率の公理 前園確率統計確率の基本性質 (p.3)
- 確率に関する基本的定理 前園確率統計定理 1.1(p.4)

この授業ではやらないこと

- 測度

## ここまで来たよ

4 略解:回帰分析

5 離散型確率変数

- 事象と確率
- 離散型確率変数
- 母期待値・母平均値・母分散・母標準偏差

## 離散型確率変数

前編確率統計 §1.1

### 高校数学でありがちな問題

袋に赤玉 2 個, 白玉 3 個がはいっている. いちどに 3 個取り出したとき, 赤玉が  $x$  個である確率は ?

$X$  が確率変数.

$X$  は離散型確率変数 離散型  $\approx$  整数値

易しく言ったら,  $\Omega = \{0, 1, 2, 3\}$ . この元が  $x$ .

### 前回までとの関係

トランプ 1 セット  $\neq$  なんとか坂

アイドル作成ゲームで, 新しいメンバーをスカウトする ボタンを押したら, CPU 内部でサイコロが振られて (=確率) 身長体重が決まって...を 49 回繰り返したら, 49 個からなる 2 変量データができた, みたいな関係. 推測統計まで行ったときに明らかになります.

## 言葉

## 確率分布 (確率関数)

前園確率統計表 2.2

$x_k$	確率 $p_k = f(x_k) = P(X = x_k)$	
$\vdots$	0	
-1	0	
0	$\frac{1}{10} = 1/5 C_3$	$p_x = f(x) = \begin{cases} \frac{1}{10} & (x = 0) \\ \frac{6}{10} & (x = 1) \\ \frac{3}{10} & (x = 2) \\ 0 & (\text{他}) \end{cases}$
1	$\frac{6}{10} = 2 \cdot 3/5 C_3$	
2	$\frac{3}{10} = 1 \cdot 3/5 C_3$	
3	0	
$\vdots$	0	
計	1	

$$p_k = f(x_k).$$

## 確率分布の性質

$$0 \leq f(x) \leq 1. \quad \sum_x f(x) = 1.$$

高校 数学 A ではこの表を作るまで, 高校 数学 B, 確率統計☆演習 I(L) では主にこの表ができた後を考える。



## ここまで来たよ

4 略解:回帰分析

5 離散型確率変数

- 事象と確率
- 離散型確率変数
- 母期待値・母平均値・母分散・母標準偏差

関数  $u(x)$  の母期待値 高校 数学 AB 前園確率統計 P.49関数  $u(x)$  の母期待値  $E[u(X)]$ 

離散型確率変数  $X$  が確率分布  $f(x) = \dots$  に従うとき,

$$E[u(X)] = \sum_x u(x) \times f(x)$$

$u$  は普通に関数. 例:  $u(x) = x^2, e^x$ , (場合分けで書かれた関数), ...

## 性質

$E[1] = 1$ . ( $u(x) = 1$  と  $\sum_x f(x) = 1$  から)

特に名前のついた量 (「母」で前回までと区別)

- 母平均値  $m = E[X]$ . ( $u(x) = x$  ってこと). ( $x$  の) 母期待値とも
- 母分散  $= V[X] = E[(X - m)^2]$ . ( $u(x) = (x - m)^2$  ってこと)
- 母標準偏差  $= \sqrt{V[X]}$

## 事象の確率

$A = \{x|a(x)\} \subset \Omega$  のとき,

事象  $A$  の確率  $P(A) =$  条件  $a(X)$  が成立する確率  $P(a(X))$ .

### 特徴関数

$$\text{関数 } I_{[a(X)]}(x) = \begin{cases} 1 & (a(x) \text{ が真}) \\ 0 & (a(x) \text{ が偽}) \end{cases}$$

とすると,

$$P(A) = P(a(X)) = E[I_{[a(X)]}(X)]$$

**例**  $x \in \mathbb{Z}$  のとき,

$$I_{[X^2 \leq 4]}(x) = \begin{cases} 1 & (-2 \leq x \leq 2) \\ 0 & (\text{他}) \end{cases}$$

## L05-Q1

## Quiz(離散的な確率変数の母平均・母分散・母標準偏差)

整数に値をとる離散型確率変数  $X$  は次の確率分布に従う。

$$f(x) = \begin{cases} \frac{4}{12} & (x = -1) \\ \frac{5}{12} & (x = 0) \\ \frac{3}{12} & (x = 2) \\ 0 & (\text{他}) \end{cases}$$

- ① 母期待値  $E[e^X]$  を求めよう。
- ②  $X$  の母平均値を求めよう。
- ③  $X$  の母分散を求めよう。
- ④  $X$  の母標準偏差を求めよう。
- ⑤ 事象  $X \leq 1$  の確率を求めよう。



## 母平均値, 母分散の性質

母平均値の性質 高校 数学 B 前園確率統計定理 3.1(1)(p.50)

$X$ : 確率変数,  $a, b \in \mathbb{R}$ : 定数 のとき,

$$\begin{aligned} E[aX + b] &= \sum_x (ax + b) \times f(x) \\ &= \left( a \sum_x x \times f(x) \right) + b \sum_x f(x) = aE[X] + b. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E[u_1(X) + u_2(X)] &= \sum_x (u_1(X) + u_2(X)) \times f(x) \\ &= E[u_1(X)] + E[u_2(X)]. \end{aligned}$$

もちろん一般には  $E[u(X)] \neq u(E[X])$ ,  $E[X^2] \neq (E[X])^2$ .  
これ,  $\sin(x^2) \neq (\sin(x))^2$  と同じくらい当たり前+だいじ.

$u(X)$  の母期待値 =  $(Y = u(X))$  の母平均値)

$x$	確率	$y = u(x)$	確率
0	$f(0)$	3	$g(3) = f(u(0))$
1	$f(1)$	5	$g(5) = f(u(1))$
2	$f(2)$	7	$g(7) = f(u(2))$
⋮			

## 母分散の性質 高校 数学 B 前園確率統計定理 3.2(p.53)

$X$ : 確率変数,  $a, b \in \mathbb{R}$ : 定数 のとき,

$$V[aX + b] = a^2V[X].$$

## 母分散の性質 高校 数学 B 前園確率統計定理 3.2(p.53)

$$V[X] = E[X^2] - (E[X])^2$$



## L05-Q2

## Quiz(確率変数の変換)

確率変数  $X$  の母期待値, 母分散は次を満たす.

$$V[X] = 9, \quad E[X] = 2.$$

- ① 母期待値  $E[-X^2 + 2X - 3]$  を求めよう.
- ② 確率変数  $Y = -2X - 3$  の母分散  $V[-2X - 3]$  を求めよう.

## L05-Q3

## Quiz(離散的な確率変数の母平均値・母分散・母標準偏差・確率)

整数に値をとる離散型確率変数  $X$  は次の確率分布に従う.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{55} & (0 \leq x \leq 10) \\ 0 & (\text{他}) \end{cases}$$

- ① 確率  $P(X \leq 5)$  を求めよう.
- ② 母平均値  $E[X]$  を求めよう.
- ③ 母分散  $V[X]$  を求めよう.

## L05-Q4

前園確率統計演習問題 3.1(p.63)

## L05-Q5

前園確率統計演習問題 3.2(p.63)

## 連絡

Moodle

<https://learn.math.ryukoku.ac.jp/>



Moodle モバイルアプリ

<https://download.moodle.org/mobile>



起動後, URL <https://learn.math.ryukoku.ac.jp/moodle> を登録

- 次回の trial から, 黙ってても, 前々回と同種の問題を再出題します (1/3 くらい)
- 今回から, 予習復習問題を, 期限後も (再/初) 受験できるようにします. 点数にはカウントしないけど, プチテスト準備に利用してね.
- 樋口オフィスアワー火昼 (1-539) 金 14:40-15:40(1-502), Math ラウンジ月-木昼 (1-614)
- Trial 予告
- Learn Math Moodle の予習復習問題で来週の trial に備えてね.
- 教科書 前編確率統計 §1.2, §2.4, §2.5, §3.3 読んできてね.
- プチテストやります! 2018-11-21 水 1 を予定
- 数学検定申込受付中