多次元の確率分布と独立性

樋口さぶろお　http://hig3.net

龍谷大学理工学部数理情報学科

確率統計☆演習 I　L06(2018-10-31 Wed)

最終更新: Time-stamp: "2018-11-02 Fri 16:17 JST hig"

今日の目標

- 同時分布から周辺分布, 母期待値, 母共分散が計算できる 前園確率統計 p.50,p.56
- 確率変数の独立性を判定し利用できる 前園確率統計 §2.5

L05-Q1

Quiz 解答:離散的な確率変数の母平均・母分散・母標準偏差

1. 期待値 $\mathrm{E}[\mathrm{e}^X] = \frac{4}{12}\cdot \mathrm{e}^{-1} + \frac{5}{12}\cdot \mathrm{e}^{0} + \frac{3}{12}\cdot \mathrm{e}^{2}$.
2. 母平均値 $\mathrm{E}[X] = \frac{4}{12}\cdot(-1) + \frac{5}{12}\cdot 0 + \frac{3}{12}\cdot 2 = \frac{1}{6}(=\mu)$.
3. 母分散
   $\mathrm{V}[X] = \mathrm{E}[(X-\mu)^2] = \frac{4}{12}\cdot(-1-\frac{1}{6})^2 + \frac{5}{12}\cdot(0-\frac{1}{6})^2 + \frac{3}{12}(2-\frac{1}{6})^2 = \frac{47}{36}$.
4. 母標準偏差 $\sqrt{\mathrm{V}[X]} = \sqrt{\frac{47}{36}}$.
5. 確率 $\mathrm{E}[\mathrm{I}_{[X\leq 1]}(X)] = \frac{4}{12}\cdot 1 + \frac{5}{12}\cdot 1 + \frac{3}{12}\cdot 0 = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$.

L05-Q2

Quiz 解答:確率変数の変換

$\mathrm{E}[X^2] = \mathrm{V}[X] + \mathrm{E}[X]^2 = 13$.

1. $\mathrm{E}[-X^2+2X-3] = -\mathrm{E}[X^2]+2\mathrm{E}[X]-3\mathrm{E}[1] = -13+2\cdot 2-3\cdot 1 = -12$.
2. $\mathrm{V}[-2X-3] = \mathrm{V}[-2X] = (-2)^2\mathrm{V}[X] = 36$.

ここまで来たよ

2 つの離散型確率変数の同時分布 高校 数学 B 前園確率統計 §2.4

例 6 枚のカードから無作為に 1 枚引く. ♡7 ♡8 ♡9 ◇8 ♠9 ♣9
2 つの離散型確率変数の同時分布
X = 数, $Y = 0$(赤札), 1(黒札) とすると (x, y) を得る確率は 2 変数の確率関数で書ける. 同時分布, 結合分布, joint distribution という.

$$f_{\mathrm{XY}}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{3} & ((x,y)=(8,0)) \\ \frac{1}{6} & ((x,y)=(9,0)) \\ \frac{1}{3} & ((x,y)=(9,1)) \\ \frac{1}{6} & ((x,y)=(7,0)) \\ 0 & (\text{他}) \end{cases}$$

表で書いた方がまし. ここでは, 「他」は省略.

$y \backslash x$	7	8	9	計
0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	
1	0	0	$\frac{1}{3}$	
計				

同時分布が与えられたときの母期待値

同時分布が与えられたときの母期待値

$$\mathrm{E}[v(X,Y)] = \sum_{x=-\infty}^{+\infty} \sum_{y=-\infty}^{+\infty} v(x,y) \cdot f_{\mathrm{XY}}(x,y)$$

同時分布が与えられたときの確率 (母比率)

$$P(a(X,Y)) = \mathrm{E}[\mathrm{I}_{[a(X,Y)]}(X,Y)] \sum_{x=-\infty}^{+\infty} \sum_{y=-\infty}^{+\infty} \mathrm{I}_{[a(X,Y)]}(x,y) \cdot f_{\mathrm{XY}}(x,y)$$

L06-Q1

Quiz(多次元の確率変数の期待値)

2 変数 X, Y の離散型確率分布を考える. 同時分布 $f_{\mathrm{XY}}(x, y)$ が下の表で与えられる.

$y \backslash x$	1	2	3
0	0	2/12	1/12
2	4/12	0	5/12

1. 母期待値 $\mathrm{E}[X + 2Y]$ を求めよう.
2. 母期待値 $\mathrm{E}[\mathrm{I}_{[Y \geq 1]}(X, Y)]$ を求めよう.
3. 周辺分布 $f_{\mathrm{X}}(x)$, $f_{\mathrm{Y}}(y)$ を求めよう.

2 次元の確率分布の母期待値の性質 高校 数学 B 前園確率統計定理 3.1(2)

$$\mathrm{E}[v_1(X,Y)+v_2(X,Y)] = \mathrm{E}[v_1(X,Y)] + \mathrm{E}[v_2(X,Y)]$$
$$\text{特に } \mathrm{E}[X+Y] = \mathrm{E}[X] + \mathrm{E}[Y]$$

なぜなら,

$$\begin{aligned}\mathrm{E}[X+Y] &= \sum_x \sum_y (x+y) f_{\mathrm{XY}}(x,y) \\ &= \sum_x \sum_y x \cdot f_{\mathrm{XY}}(x,y) + \sum_x \sum_y y \cdot f_{\mathrm{XY}}(x,y) \\ &= \mathrm{E}[X] + \mathrm{E}[Y].\end{aligned}$$

大注意: 一般には
$\mathrm{E}[v(X,Y)] \neq v(\mathrm{E}[X], \mathrm{E}[Y])$ ($\mathrm{E}[u(X)] \neq u(\mathrm{E}[X])$ でないのと同様).
特に $\mathrm{E}[XY] \neq \mathrm{E}[X]\mathrm{E}[Y]$ (独立なときはまた別に).

周辺分布

確率変数の周辺分布

同時分布 $f_{\mathrm{XY}}(x,y)$ に対して,
X の周辺分布 $f_{\mathrm{X}}(x)$, Y の周辺分布 $f_{\mathrm{Y}}(y)$ は,

$$f_{\mathrm{X}}(x)=\sum_{y} f_{\mathrm{XY}}(x,y),\quad f_{\mathrm{Y}}(y)=\sum_{x} f_{\mathrm{XY}}(x,y)$$

要するに

X だけ, Y だけの関数の母期待値

x だけ, y だけの関数の母期待値は,

下の左辺= $\boxed{}$ で計算しても

下の右辺= $\boxed{}$ で計算しても

同じ.

$$\mathrm{E}[v(X)] = \sum_x \sum_y v(x) \cdot f_{\mathrm{XY}}(x,y) = \sum_x v(x) \sum_y f_{\mathrm{XY}}(x,y) = \sum_x v(x) \cdot f_{\mathrm{X}}(x)$$

$$\mathrm{E}[v(Y)] = \sum_y \sum_x v(y) \cdot f_{\mathrm{XY}}(x,y) = \sum_y v(y) \sum_x f_{\mathrm{XY}}(x,y) = \sum_y v(y) \cdot f_{\mathrm{Y}}(y)$$

ここまで来たよ

母共分散 高校 数学 B 前園確率統計 p.56

母共分散 covariance 前園確率統計 p.56

X, Y が確率変数で, $\mu_X = \mathrm{E}[X], \mu_Y = \mathrm{E}[Y]$ であるとき,

$$\text{母共分散}\ \mathrm{Cov}[X,Y] = \mathrm{E}[(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)]$$
$$= \boxed{\text{前園確率統計定理 3.3(1)}} \cdots = \mathrm{E}[XY] - \mathrm{E}[X] \times \mathrm{E}[Y].$$

母相関係数 correlation 前園確率統計 p.58

X, Y が確率変数であるとき,

$$\text{母相関係数}\ \rho[X,Y] = \frac{\mathrm{Cov}[X,Y]}{\sqrt{\mathrm{V}[X]}\sqrt{\mathrm{V}[Y]}}$$

$-1 \leq \rho[X,Y] \leq 1$ が成立. 前園確率統計定理 3.5(p.59)

母共分散の性質 前園確率統計定理 3.4(2)

$$\mathrm{Cov}[aX, bY] = ab \cdot \mathrm{Cov}[X, Y].$$

L06-Q2

母共分散

さっきの問で母共分散は?

L06-Q3

Quiz(独立と限らない確率変数の母期待値)

確率変数 X, Y を考える.
$\mathrm{E}[X] = 2, \mathrm{E}[Y] = 3, \mathrm{V}[X] = 5, \mathrm{V}[Y] = 11, \mathrm{Cov}[X, Y] = 7$ である.

1. $\mathrm{E}[-2X + 3Y]$ を求めよう.
2. $\mathrm{V}[-2X + 3Y]$ を求めよう.

ここまで来たよ

独立性 高校 数学 B 前園確率統計 §2.5

独立性

確率変数 X, Y が同時分布 $f_{\mathrm{XY}}(x, y)$ を持つとき, X, Y が独立とは,

$$f_{\mathrm{XY}}(x, y) = f_{\mathrm{X}}(x) \times f_{\mathrm{Y}}(y)$$

が成立することをいう (世の中には, 同値な定義が多数).

X, Y が独立とは, X, Y が互いに $\boxed{}$

事象 A, B が独立 $\Leftrightarrow P(A$ かつ $B) = P(A) \times P(B)$ 前園確率統計 §1.2, の特別な場合.

独立性と母共分散 前園確率統計定理 3.3(4)

X, Y が独立 $\Rightarrow$ 母共分散 $\mathrm{Cov}[X, Y] = 0$.

すぐ後で証明.

母共分散 $\mathrm{Cov}[X, Y] = 0$ は, X, Y が独立であるための $\boxed{}$ 条件.

L06-Q4

Quiz(2 つの離散型確率変数の母期待値・母平均値・母共分散・確率・独立性)

離散型確率変数 X, Y の同時分布は次の表で与えられる.

$y \backslash x$	1	3
2	1/7	2/7
4	0	4/7

で与えられる.

1. X, Y が独立かどうか判定しよう.
2. 母分散 $\mathrm{V}[X]$ を求めよう.
3. 母共分散 $\mathrm{Cov}[X, Y]$ を求めよう.

L06-Q5

Quiz(離散型確率変数の独立性)

2 次元の離散型確率変数 (X, Y) を考える．同時分布 $f_{\mathrm{XY}}(x, y)$ は次の表で与えられる (現れない X, Y の確率は zero である).

$y\backslash x$	2	3
3	2/12	1/12
7	A	B

X, Y が独立になるように, 実数 A, B を定めよう.

X と $Y = u(X)$ は独立ではない

例

$$f_X(x) = \begin{cases} 1-p & (x=0) \\ p & (x=1) \end{cases}$$

$y \backslash x$	0	1	
$u(0)$			
$u(1)$			
	$1-p$	p	1

正確には $u(x)$ が定数関数のときは独立

X, Y が独立，はラッキー

確率分布を暗記しろって言われたときに，

- 独立じゃなかったら，100×200 個の数をおぼえなきゃいけないところが，
- 独立なら $100 + 200$ 個の数だけおぼえればいい．

X, Y が独立なときに成立するとてもいい性質 前園確率統計定理 3.3(4)

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}[v_1(X) \times v_2(Y)] =& \mathrm{E}[v_1(X)] \times \mathrm{E}[v_2(Y)] \\
\text{特に } \mathrm{E}[XY] =& \mathrm{E}[X] \times \mathrm{E}[Y] \\
\text{特に } \mathrm{Cov}[X, Y] =& (\mathrm{E}[XY] - \mathrm{E}[X] \times \mathrm{E}[Y] =)0 \\
\mathrm{V}[X + Y] =& \mathrm{V}[X] + \mathrm{V}[Y]
\end{aligned}
$$

さいごの式は，独立でなくても $\mathrm{Cov}[X, Y] = 0$ だけで成り立つ．

証明

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}[XY] &= \sum_x \sum_y xy \cdot f_{\mathrm{XY}}(x,y) \\
&= \sum_x \sum_y xy \cdot f_{\mathrm{X}}(x) \times f_{\mathrm{Y}}(y) \\
&= \sum_x x \cdot f_{\mathrm{X}}(x) \times \sum_y y \cdot f_{\mathrm{Y}}(y) = \mathrm{E}[X] \times \mathrm{E}[Y]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{V}[X+Y] =& \mathrm{E}[(X+Y)^2] - \mathrm{E}[X+Y]^2 \\
=& \mathrm{E}[X^2] + 2\mathrm{E}[XY] + \mathrm{E}[Y^2] - (\mathrm{E}[X]^2 + 2\mathrm{E}[X]\mathrm{E}[Y] + \mathrm{E}[Y]^2) \\
=& \mathrm{V}[X] + 2\mathrm{Cov}[X,Y] + \mathrm{V}[Y]
\end{aligned}
$$

L06-Q6

Quiz(独立な確率変数の母期待値)

独立な確率変数 X, Y を考える.
$\mathrm{E}[X] = 2, \mathrm{E}[Y] = 3, \mathrm{V}[X] = 5, \mathrm{V}[Y] = 11$ である.

1. $\mathrm{E}[(-2X + 3Y)(X + 5Y)]$ を求めよう.
2. $\mathrm{V}[-2X + 3Y]$ を求めよう.

L06-Q7

前園確率統計演習問題 3.4(p.63)

L06-Q8

前園確率統計演習問題 3.5(p.63)

連絡

Moodle モバイルアプリ

https://download.moodle.org/mobile

起動後, URL https://learn.math.ryukoku.ac.jp/moodle を登録

Moodle

https://learn.math.ryukoku.ac.jp/

- 次回から, trial に, 前回の問題と同種の問題を再出題します (1/3 くらい)
- 今回から, 予習復習問題を, 期限後も (再/初) 受験できるようにします．点数にはカウントしないけど, プチテスト準備に活用してね.
- 樋口オフィスアワー火昼 (1-539) 金 14:40-15:40(1-502), Math ラウンジ月-木昼 (1-614)
- Trial 予告
- Learn Math Moodle の予習復習問題で来週の trial に備えてね.
- 教科書の二項分布のところ 前園確率統計 pp.19,20,51,54 読んできてね.
- プチテストやります! 2018-11-21 を予定