二項分布, 独立同分布の和

樋口さぶろお　http://hig3.net

龍谷大学理工学部数理情報学科

確率統計☆演習 I　L09(2018-11-28 Wed)

最終更新: Time-stamp: "2018-11-28 Wed 13:17 JST hig"

今日の目標

- 正規分布の母平均値・母分散・確率が積分や表で求められる 前園確率統計 p.23,p.53
- 二項分布の母期待値・確率が求められる
- 独立同分布の和の母平均値母分散が求められる

L08-Q1
Quiz 解答:一様分布

1. $\mathrm{E}[1] = 1$ より, $C = \frac{1}{d-c}$.
2. $\mathrm{E}[X] = \frac{c+d}{2}$.
3. $\sqrt{\mathrm{V}[X]} = \frac{d-c}{\sqrt{12}} \simeq \frac{d-c}{3.5}$.

L08-Q2
TA Prob and Sol:一様分布

連続型確率変数 $Y \sim \mathrm{U}(3,5)$ に対して, $X = 2Y + 1$ を考える.

1. X のしたがう分布と確率密度関数 $f_{\mathrm{X}}(x)$ を答えよう.
2. $\mathrm{E}[X]$ を求めよう.
3. $\mathrm{V}[X]$ を求めよう.

略解

1.
$$f_{\mathrm{Y}}(y) = \begin{cases} \frac{1}{2} & (3 \leq y < 5) \\ 0 & (他) \end{cases}$$

より,

$$f_{\mathrm{X}}(x) = \begin{cases} \frac{1}{4} & (3 \leq \frac{x-1}{2} < 5) \\ 0 & (他) \end{cases}$$

すなわち, 別の書き方では,

$$f_{\mathrm{X}}(x) = \begin{cases} \frac{1}{4} & (2 \cdot 3 + 1 \leq x < 2 \cdot 5 + 1) \\ 0 & (他) \end{cases}.$$

すなわち, $X \sim \mathrm{U}(7, 11)$.

2. $\mathrm{E}[X] = \frac{7+11}{2}$, または, $\mathrm{E}[X] = 2\mathrm{E}[Y] + 1 = 9$.
3. $\mathrm{V}[X] = \frac{(11-7)^2}{12}$, または, $\mathrm{V}[X] = 2^2\mathrm{V}[Y] = 4 \cdot \frac{(3-1)^2}{12} = \frac{4}{3}$.

L08-Q3

Quiz 解答:標準正規分布の確率

標準正規分布の確率密度関数は偶関数 ($z = 0$ に関して対称) なので,

$$P(-\infty < Z < -2) = \int_{-\infty}^{-2} f(z)\,\mathrm{d}z$$
$$= Q(-\infty) - Q(-2) = 1 - (1 - Q(2)) = Q(2) = 0.0228.$$

L08-Q4

Quiz 解答:標準正規分布の確率

確率密度関数が偶関数であることに注意する.

1. $\mathrm{E}[Z^2] = \mathrm{V}[Z] + (\mathrm{E}[Z])^2 = 1 - 0^2.$
2. $P(-0.56 < Z < +1.23) = \int_{-0.56}^{1.23} f(z)\,\mathrm{d}z = Q(-0.56) - Q(1.23) = (1 - Q(0.56)) - Q(1.23) = 1 - 0.1093 - 0.2877 = 0.6030.$

ここまで来たよ

8. 略解:連続型確率変数の例:一様分布・正規分布
   - 一般の正規分布の確率
9. 二項分布, 独立同分布の和
   - チェビシェフの不等式と母平均値と母分散の意味
   - 二項分布
   - 独立同分布

一般の正規分布 $\mathrm{N}(b; a^2)$ 前園確率統計 p.25

$Z \sim \mathrm{N}(0, 1^2)$ に対して, $X = aZ + b$ を考える. $Z = \frac{X-b}{a}$.

$$\mathrm{E}[1] = 1,$$
前園確率統計 p.53 微積分 II

$$\mu = \mathrm{E}[X] = \mathrm{E}[aZ + b] = b,$$
前園確率統計 p.53

$$\sigma^2 = \mathrm{V}[X] = \mathrm{V}[aZ + b] = a^2,$$
前園確率統計 p.53 微積分 II

X は (一般の) 正規分布にしたがう.

(一般の) 正規分布 $\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$

前園確率統計 p.23 母平均値 $\mathrm{E}[X] = \mu$, 母分散 $\mathrm{V}[X] = \sigma^2$ の正規分布 $\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$ の確率密度関数は,

$$f(x; \mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}.$$

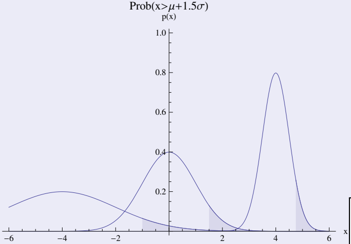
正規分布 $\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$ の確率の求め方 I

一般の正規分布の確率

$Z \sim \mathrm{N}(0, 1^2)$ のとき, $X = \sigma Z + \mu \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$

$$P(c < X < d) = P(\tfrac{c-\mu}{\sigma} < \tfrac{X-\mu}{\sigma} < \tfrac{d-\mu}{\sigma}) = P(\tfrac{c-\mu}{\sigma} < Z < \tfrac{d-\mu}{\sigma})$$

X に対応する $Z = \frac{X-\mu}{\sigma} \sim \mathrm{N}(0, 1^2)$ の範囲として考える.



L08-Q5

Quiz(正規分布の確率)

X が母平均値 3, 母分散 4 の正規分布にしたがうとする. 次を, $Q(z)$ (ただし $0 < z < +\infty$) で書こう. さらに, 表を使って小数で書こう.

1. $X \geq 5$ となる確率
2. $+1 \leq X \leq 7$ となる確率

前園確率統計例題 2.2 | 前園確率統計演習問題 2.3

ここまで来たよ

8. 略解:連続型確率変数の例:一様分布・正規分布
   - 一般の正規分布の確率

9. 二項分布, 独立同分布の和
   - チェビシェフの不等式と母平均値と母分散の意味
   - 二項分布
   - 独立同分布

チェビシェフの不等式

チェビシェフの不等式 Chebyshev's inequality 前園確率統計 p.73

X を離散型または連続型確率変数とする. $\mu = \mathrm{E}[X]$: 母平均値, $\sigma^2 = \mathrm{V}[X]$: 母分散
$a > 0$: 任意の正の実数.
このとき次が成立する.

$$P(|X - \mu| \geq a\sigma) \leq \frac{1}{a^2}$$

どんな X にも使えて便利な不等式. 意味は$\cdots$

チェビシェフの不等式の証明 (連続型)

$P(|X-\mu| \geq a\sigma)$ を $f(x)$ の積分で書くと…

$$\begin{aligned}
P(|X-\mu| \geq a\sigma) =& \mathrm{E}[\mathrm{I}_{[|X-\mu|\geq a\sigma]}(x)] \\
=& \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{I}_{[|X-\mu|\geq a\sigma]}(x) \cdot f(x) \\
=& \int_{-\infty}^{\mu-a\sigma} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{\mu+a\sigma}^{+\infty} \text{同じ} \\
\leq& \int_{-\infty}^{\mu-a\sigma} \frac{(x-\mu)^2}{(a\sigma)^2} \cdot f(x)\mathrm{d}x + \int_{\mu+a\sigma}^{+\infty} \text{同じ} \\
\leq& \frac{1}{(a\sigma)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^2 \cdot f(x)\,\mathrm{d}x \\
=& \frac{1}{(a\sigma)^2} \mathrm{V}[X] \\
=& \frac{1}{a^2}.
\end{aligned}$$

ここまで来たよ

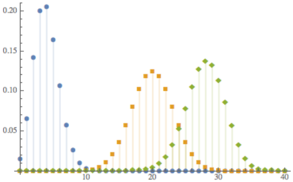
二項分布 高校 数学 B 前園確率統計 §2.1

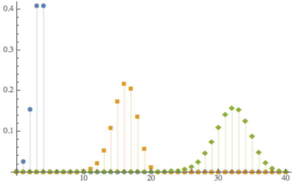
二項分布

離散型確率変数 X が次の確率分布を持つとき, X はパラメタ n, p の二項分布 $\mathrm{B}(n, p)$ にしたがうという.

$$f(x) = \begin{cases} {}_n\mathrm{C}_x \, p^x (1-p)^{n-x} & (x = 0, 1, 2, 3, \ldots, n) \\ 0 & (\text{他}) \end{cases}$$

意味: 確率 p で表の出るコインを n 回投げたとき, x 回表が出る確率.





$${}_n\mathrm{C}_x = \binom{n}{x} = \frac{n!}{x!(n-x)!}.$$

$\mathrm{B}(40, 0.1), \mathrm{B}(40, 0.5), \mathrm{B}(40, 0.7)$, $\mathrm{B}(4, 0.8), \mathrm{B}(20, 0.8), \mathrm{B}(40, 0.8)$

二項分布の母平均値と母分散 (証明延期)

前園確率統計 p.51,54

$$\mathrm{E}[X] = \boxed{}, \mathrm{V}[X] = \boxed{}$$

$\mathrm{E}[1] =$

$$\boxed{}$$

二項定理 高校 数学 A

$$(a+b)^n = \sum_{x=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_x a^x b^{n-x}$$

L09-Q1

Quiz(二項分布)

確率 $p = \frac{2}{3}$ で表のでるコインを 100 回投げる.

1. 表が 40 回でる確率を求めよう. 階乗 $n!$ とべき乗 a^b と分数 $\frac{a}{b}$ は簡単化・約分しなくてよい. それ以外の記号は使わないで答えること.
2. 表がでる回数の平均値, 分散を求めよう.

ベルヌーイ分布

ベルヌーイ分布

$n = 1$ の二項分布 $\mathrm{B}(1, p)$ のこと

$$P(X = x) = f(x) = \begin{cases} 1 - p & (x = 0) \\ p & (x = 1) \\ 0 & (\text{他}) \end{cases}$$

意味:ベルヌーイ試行=(不公平な) コイン投げ．表がでる確率 p．表 $x = 1$．

ベルヌーイ分布の母平均値と母分散

$\mathrm{E}[X] = \boxed{}$,　$\mathrm{V}[X] = \boxed{}$.　(上の f から直接計算すると)

ベルヌーイ分布と二項分布の関係

$X_1, X_2, \ldots, X_n$ が独立で $X_i \sim \mathrm{B}(1,p)$ のとき，
$U_n = X_1 + \cdots + X_n$ は $U_n \sim \mathrm{B}(n,p)$.

なぜなら

注: $U_2 = X_1 + X_2$ と，$Y = 2X_1$ は異なる.

ここまで来たよ

8 略解:連続型確率変数の例:一様分布・正規分布
- 一般の正規分布の確率

9 二項分布, 独立同分布の和
- チェビシェフの不等式と母平均値と母分散の意味
- 二項分布
- 独立同分布

独立同分布の性質

独立同分布 (i.i.d.)

離散型/連続型確率変数 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ が，たがいに独立で，すべて同じ確率分布に従う (同じ確率関数 $f(x)$) とする．
これを $X_1, \ldots, X_n$ は独立同分布に従う (i.i.d.=independent and identically-distributed) という．

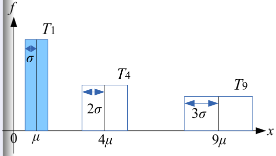
i.i.d にしたがう確率変数の和 (

母平均値 $\mathrm{E}[X_i] = \mu$, 母分散 $\mathrm{V}[X_i] = \sigma^2$.
和の確率変数 $U_n = X_1 + \cdots + X_n$.

$$\mathrm{E}[U_n] = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{E}[X_i] = n \times \mu.$$

$$\mathrm{V}[U_n] = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{V}[X_i] = n \times \sigma^2$$

U_n の確率密度関数はこんな感じ?



このことから, 二項分布の母平均値, 母分散の式は証明できる.

(復習) 確率変数の和の母平均値と母分散

確率変数 $X_1, X_2, U_2 = X_1 + X_2$ を考える.
いつでも $\mathrm{E}[U_2] = \mathrm{E}[X_1 + X_2] = \mathrm{E}[X_1] + \mathrm{E}[X_2]$.
X_1, X_2 が独立のとき $\mathrm{V}[U_2] = \mathrm{V}[X_1 + X_2] = \mathrm{V}[X_1] + \mathrm{V}[X_2]$.

L09-Q2

Quiz(ベルヌーイ分布)

ある宝くじは, あたりとはずれの 2 種類の結果だけがある. あたりの確率は $p = 0.05$ である. あたりの賞金は 1000 円, はずれの賞金は 0 円である. 賞金を確率変数 Y (円) とする.

1. Y と, ベルヌーイ分布 $\mathrm{B}(1, p)$ に従う確率変数 X との関係を書こう.
2. Y の母平均値と母分散を求めよう. 単位をつけよう.

L09-Q3

Quiz(二項分布の応用)

ある宝くじは, あたりと残念賞の 2 種類の結果だけがある. あたりの確率は $p=0.05$ である. あたりの賞金は 1050 円, 残念賞の賞金は 50 円である. このくじを 1 回ひいたときの賞金を確率変数 Y, このくじを 20 回ひいたときの賞金の合計額を確率変数 U_{20} とする.

1. 解き方 1
   1. ベルヌーイ分布 $\mathrm{B}(1,p)$ に従う確率変数 X を考える. X と Y の関係を書こう.
   2. U_{20} の母平均値と母分散を, Y の母平均値と母分散から求めよう. 単位をつけよう.
2. 解き方 2
   1. 20 回引いたときのあたりの回数 W を考える. W はどのような分布にしたがうか? U_{20} と W の関係を書こう.
   2. U_{20} の母平均値と母分散を, W の母平均値と母分散から求めよう. 単位をつけよう.
   3. $U_{20}=4000$ となる確率を求めよう.

連絡

Moodle

https://learn.math.ryukoku.ac.jp/

Moodle モバイルアプリ

https://download.moodle.org/mobile

起動後, URL https://learn.math.ryukoku.ac.jp/moodle を登録

- 次回からはまた trial あります.
- 予習復習問題を, 期限後も (再/初) 受験できます. 点数にはカウントしないけど, プチテスト準備に活用してね.
- Learn Math Moodle の予習復習問題は来週期限のものがあります. プチテストに備えてね.
- 教科書の母集団, 標本, 標本抽出, 中心極限定理のところ 前園確率統計 §5.1, p.71-77 読んできてね.