龍谷大学理工学研究科数理情報学専攻
樋口さぶろお[2]

理論物理学特論[1]

2001 年 6 月 27 日

9 先々週の quiz の解答

9.1 摂動による微分方程式の解

1.

$$x(t) = x^0(T_0, T_1) + \varepsilon x^1(T_0, T_1) + \cdots \tag{1}$$

とおく.

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial x}{\partial T_0} + \varepsilon \frac{\partial x}{\partial T_1} \tag{2}$$

に注意すると, 微分方程式は,

$$\begin{aligned}(x^0_{00} + 2\varepsilon x^0_{01} + \varepsilon^2 x^0_{11}) + \varepsilon(x^1_{00} + 2\varepsilon x^1_{01} + \varepsilon^2 x^1_{11}) + \cdots)\\ +\varepsilon(x^0_0 + \varepsilon x^0_1 + \varepsilon(x^1_0 + \varepsilon x^1_1) + \cdots)^3 + (x^0 + \varepsilon x^1 + \cdots) = 0.\end{aligned} \tag{3}$$

ただし, $x^0_1 = \partial x^0/\partial T_1$ など. ε の各次数を比較して,

$$\varepsilon^0) \quad x^0_{00}(T_0, T_1) + x^0(T_0, T_1) = 0, \tag{4}$$

$$\varepsilon^1) \quad 2x^0_{01}(T_0, T_1) + x^1_{00}(T_0, T_1) + (x^0_0(T_0, T_1))^3 + x^1(T_0, T_1) = 0. \tag{5}$$

2. (4) を解いて,

$$x^0(T_0, T_1) = A(T_1)\exp(iT_0) + A^*(T_1)\exp(-iT_0). \tag{6}$$

(5) に代入して,

$$x^1_{00}(T_0, T_1) + x^1(T_0, T_1) = -2x^0_{01}(T_0, T_1) - (x^0_0(T_0, T_1))^3 \tag{7}$$

$$\begin{aligned}&= -2i(A'(T_1)\exp(iT_0) - A^{*\prime}(T_1)\exp(iT_0))\\ &\quad - (iA(T_1)\exp(iT_0) - iA^*(T_1)\exp(iT_0))^3\end{aligned} \tag{8}$$

永年項が現れないための条件は,

$$\int_0^{2\pi} dT_0 (\text{右辺}) \exp(\pm iT_0) = 0 \tag{9}$$

すなわち,

$$-2iA'(T_0) - 3i^3 A^2(T_1)(-A^*(T_1)) = 0, \tag{10}$$

$$+2iA^{*\prime}(T_0) - 3i^3 A(T_1)(-A^*(T_1))^2 = 0. \tag{11}$$

[1] `http://sparrow.math.ryukoku.ac.jp/~hig/theorphys/`

[2] `mailto:hig@math.ryukoku.ac.jp`, `http://www.math.ryukoku.ac.jp/~hig/`, へや 1-508, でんわ 077-543-7501

3. $A(T_1) = R(T_1)\exp(i\theta(T_1))(R(T_1), \theta(T_1) \in \mathbb{R})$ とおくと,

$$2(R'(T_1) + R(T_1)i\theta'(T_1)) + 3R(T_1)^3 = 0, \tag{12}$$

実部虚部それぞれをとって

$$2R(T_1)\theta'(T_1) = 0, \qquad 2R'(T_1) + 3R(T_1)^3 = 0. \tag{13}$$

したがって,

$$\theta(T_1) \equiv \theta_0, R(T_1) = (C + 3T_1)^{-1/2}, (\theta_0, C : \text{定数}) \tag{14}$$

すなわち

$$x(t) = x^0(t, \varepsilon t) + \cdots = 2(C + 3\varepsilon t)^{-1/2}\cos(t + \theta_0) + \cdots \tag{15}$$

11 今週の quiz

11.1 接合漸近展開法と境界層

摂動パラメターが $\varepsilon \ll 1$ であるとき, 微分方程式

$$\varepsilon\ddot{x}(t) + (1+\varepsilon)\dot{x}(t) + x(t) = 0, \qquad x(0) = 0, x(1) = \exp(-1) \tag{16}$$

を考える.

1. 素朴に,

$$x(t) = x_0(t) + \varepsilon x_1(t) + \cdots \tag{17}$$

と摂動展開して, (16) から, $x_0(t)$ に対する微分方程式を求めよ.

2. $x_0(t)$ についての微分方程式を解け.

3. 上で求めた $x_0(t)$ に, 境界条件 $x(1) = \exp(-1)$ を課して積分定数を決定せよ. もし仮に, さらに境界条件 $x(0) = 0$ を課すと矛盾が生じることを示せ.

4. この微分方程式を厳密にとけ.