

3 1次元ランダムウォークの再帰性

1次元のランダムウォークが、正負の方向に確率 $p = q = 1/2$ で jump するときにかぎって再帰的であるかどうかを次のようにして調べよう。

時刻 0 で $x = 0$ にいた粒子が、時刻 $2t$ で 0 に戻ってくる確率 $P(0, 2t)$ は、 $2t$ 回の移動のうち t 回が右、 t 回が左である確率なので、

$$P(0, 2t) = \binom{2t}{t} p^t q^t \quad (1)$$

となる。

場所 $x = 0$ で粒子がすごす時間の合計の期待値

$$\sum_{t=0}^{\infty} P(0, 2t) \quad (2)$$

が発散するかどうかを、Stirling の公式

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} \cdot n^n e^{-n} \quad (n \rightarrow \infty) \quad (3)$$

を用いて評価しよう。 p, q の値によって違うはず。数学的に厳密でなくてよい。

¹<http://sparrow.math.ryukoku.ac.jp/~hig/theorphys/>

²<mailto:hig@math.ryukoku.ac.jp>, <http://www.math.ryukoku.ac.jp/~hig/>,
へや 1-508, でんわ 077-543-7501