理論物理学特論[1] 龍谷大学理工学部数理情報学科 2003 年 04 月 30 日 樋口さぶろお[2]

前回のあらすじ

d-次元立方格子 $\mathbb{Z}^d$ 上のランダムウォーク. 時刻 t における, $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{Z}^d$ 上の存在確率を $P(\mathbf{x}, t)$ と書く.

生成関数を次で定義.

$$Z(\mathbf{s}, t) := Z(s_1, \dots, s_d, t) = \sum_{\mathbf{x}} s_1^{x_1} \cdots s_d^{x_d} P(\mathbf{x}, t). \tag{1}$$

生成関数みたいなもの.

$$\begin{aligned}\tilde{P}(\mathbf{k}, t) =& \tilde{P}(k_1, \dots, k_d, t) \\ =& \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} Z(\mathrm{e}^{ik_1}, \dots, \mathrm{e}^{ik_d}, t) \\ =& \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \sum_{\mathbf{x}} \mathrm{e}^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} P(\mathbf{x}, t)\end{aligned} \tag{2}$$

この定義は, 周期 2π の周期関数 $\tilde{P}$ の Fourier 級数展開の形をしている. よって, Fourier 級数展開の係数である P は, Fourier 変換で

$$P(\mathbf{x}, t) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\mathrm{d}\mathbf{k}}{(2\pi)^{d/2}} \mathrm{e}^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \tilde{P}(\mathbf{k}, t) \tag{3}$$

と表わせる.

3 前回の解答例 (1 次元ランダムウォークの再帰性)

$$P(0, 2t) = p^t q^t \frac{(2t)!}{t!t!} \simeq p^t q^t \frac{\sqrt{2\pi 2t}\ (2t)^{2t} \mathrm{e}^{-2t}}{(\sqrt{2\pi t}\ t^t \mathrm{e}^{-t})^2} = p^t q^t \frac{2^{2t}}{\sqrt{\pi t}}. = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} (4pq)^t. \tag{4}$$

ここで,

$$\sum_{t=0}^{\infty} P(0, 2t) \begin{cases} > \sum_{t=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi t}} = +\infty & (4pq \geq 1) \\ < \sum_{t=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi}} (4pq)^t = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{1-4pq} < \infty & (4pq < 1) \end{cases} \tag{5}$$

より $pq = \frac{1}{4}$ が収束と発散の境い目.

ここで, 確率の保存 $p + q = 1$ と相加相乗平均の関係から, $\sqrt{pq} \geq (p+q)/2 = \frac{1}{2}$ より, $pq \leq \frac{1}{4}$ で, 等号は $p = q = \frac{1}{2}$ のときに限って成立.

よって, $p = q = \frac{1}{2}$ なら再帰的 (深い…). $p \neq q$ なら非再帰的 (こっちは当たり前だよねーどっちかに離れてっちゃうしー)

[1] http://sparrow.math.ryukoku.ac.jp/~hig/theorphys/ http://hig3.net/ からもいける.

[2] mailto:hig@math.ryukoku.ac.jp, http://www.math.ryukoku.ac.jp/~hig/,
へや 1-508, でんわ 077-543-7501

4　中心極限定理

1 次元のランダムウォークを考える．1 ステップで, $x(t) \to x(t+1) = x(t) + R(t+1)$ のように移動し, 確率 $\frac{1}{3}$ で $R(t+1) = +1$, 確率 $\frac{2}{3}$ で $R(t+1) = -1$ であるとする．

ウォーカーは時刻 $t = 0$ に原点 $x = 0$ からスタートするとしよう．時刻 t での位置 $X(t)$ を考えると, $X(t+1) = X(t) + R(t+1)$ なので,

$$X(t) = \sum_{t'=1}^{t} R(t'). \tag{6}$$

時刻 (ステップ数) $t = 24$ でのウォーカーの位置 $X(24)$ の平均と分散を求めよう．その時刻での位置の確率密度関数のおおまかな形を描こう．

中心極限定理を利用して, $t = 24$ は十分大きいと考えよう．