理論物理学特論ファイナルトライアル

樋口さぶろお[1] 配布: 2004 年 08 月 02 日更新: Time-stamp: "2006-07-14 Fri 10:09 JST hig"

ファイナルトライアル参加の際の注意ポイント

1. 過程も答えよう. 最終的な答えが正しいことがわかるような過程を記そう.
2. 問題文に現れない記号を使うときは, 定義を記そう.
3. A4 片面の紙を何でも持ち込み可です.

1

2 個の実数の組 (a,b), $a,b \in \mathbb{R}$ に対して, 2 項演算 $\circ$ を,

$$(a_1,b_1)\circ(a_2,b_2)=(a_1a_2-b_1b_2, a_1b_2+a_2b_1) \tag{1}$$

と定義する. この演算 $\circ$ のもとで, 2 個の実数の組全体

$$G=\{(a,b)|a,b\in\mathbb{R}\} \tag{2}$$

は群になることを示そう.

2

加法を演算とする実数全体の群 $G=\mathbb{R}^+$ を考える. 部分集合

$$H=\{p+\sqrt{3}\cdot q|p,q\in\mathbb{Q}\}\subset G \tag{3}$$

は部分群であることを示そう.

3

複素数を成分とする $n\times n$ 正則行列全体を $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ と書く. $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ は行列の乗法に関して群になっている (このことは使ってよい). 次の部分集合が部分群であり, かつ正規部分群であることを示そう.

1. $H_1=$ (行列式の絶対値が 1 である行列全体).
2. $H_2=$ (行列式が実数である行列全体).
3. $H_3=$ (単位行列 E_n の定数倍である行列全体).

http://hig3.net/(講 義 の ペ ー ジ も こ こ か ら た ど れ ま す), http://www.math.ryukoku.ac.jp/~hig/, mailto:hig@math.ryukoku.ac.jp, tel:0775437501 数理情報学科へや:1 号館 5 階 508.

4

整数の乗法的合同群 $\mathbb{Z}_{10}^{\times}$ を考える.

1. $\mathbb{Z}_{10}^{\times}$ の元を, ($[x]_{10}$ という形で) すべて求めよう.
2. 上で求めた元の間の演算表を作ろう.
3. 上で求めたそれぞれの元の位数を求めよう.

5

整数の加法的合同群 $\mathbb{Z}_{12}^{+}$ を考える. 群 $\mathbb{Z}_{12}^{+}$ から自分自身への写像 $\phi : \mathbb{Z}_{12}^{+} \ni [x]_{12} \mapsto [(3 \times x)]_{12} \in \mathbb{Z}_{12}^{+}$ を考える.

1. 写像 ϕ が群準同型写像であることを示そう.
2. $\ker \phi$ と $\mathrm{Im}\,\phi$ を求めよう.
3. 剰余群 $\mathbb{Z}_{12}^{+}/\ker \phi$ は, 適当な $n \in \mathbb{N}$ に対して $\mathbb{Z}_{n}^{+}$ と群同型である. 自然数 n を求めよう.

6

1. 2×2 行列の全体からなる集合の部分集合
$$G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \middle| a, b \in \mathbb{R} \right\} \tag{4}$$
を考える. 集合 G は行列の加法を演算として群であることを示そう.
2. 写像
$$\psi : G \ni \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \mapsto a + \sqrt{-1} \cdot b \in \mathbb{C}^{+} \tag{5}$$
は群同型写像であることを示そう. ここで, $\mathbb{C}^{+}$ は加法を演算とする複素数全体の群.
3. 2×2 行列の全体からなる集合の部分集合
$$H = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \middle| a, b \in \mathbb{R}, a^2 + b^2 \neq 0 \right\} \tag{6}$$
を考える. 集合 G は行列の乗法を演算として群であることを示そう.
4. 写像
$$\phi : H \ni \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \mapsto a + \sqrt{-1} \cdot b \in \mathbb{C}^{\times} \tag{7}$$
は群同型写像であることを示そう. ここで, $\mathbb{C}^{\times}$ は乗法を演算とする零でない複素数全体の群.

理論物理学特論ファイナルトライアル略解

樋口さぶろお[2] 配布: 2004 年 08 月 02 日更新: Time-stamp: ”2006-07-14 Fri 10:09 JST hig”

1

結合則 $((a_1,b_1)\circ(a_2,b_2)\circ(a_3,b_3)) = \cdots = (a_1+a_2+a_3, \mathrm{e}^{a_1+a_2}b_3+\mathrm{e}^{a_1}b_2+b_1) = \cdots = (a_1,b_1)\circ((a_2,b_2)\circ(a_3,b_3))$.

単位元 任意の $(a,b)\in G$ に対して $(a,b)\circ(0,0)=(a,b)$ となるので, 単位元 $(0,0)\in g$ が存在する.

逆元 任意の $(a,b)\in G$ に対して $(a,b)\circ(-a,-b\mathrm{e}^{-a})=(0,0)$ が成立するので, 逆元 $(a,b)^{-1}=(-a,-b\mathrm{e}^{-a})\in G$ が存在する.

2

$p_i,q_i\in\mathbb{Q}$, $p_i+\sqrt{3}\cdot q_i\in H$ $(i=1,2)$ とすると, 群の演算 $+$ について, $(p_1+\sqrt{3}\cdot q_1)+(p_2+\sqrt{3}\cdot q_2)=(p_1+p_2)+\sqrt{3}\cdot(q_1+q_2)\in H$. また, $p_1+\sqrt{3}\cdot q_1$ の逆元は $(-p)+\sqrt{3}\cdot(-q)\in H$. よって, $H\le G$.

3

部分群であること

1. $M_1,M_2\in H_1$ とする. $|\det(M_1M_2)|=|\det M_1||\det M_2|=1$ より, $M_1,M_2\in H_1$. また, $M\in H_1$ の逆元 M^{-1} に対して, $\det(M^{-1})=\frac{1}{\det M}=1$ より, $M^{-1}\in H_1$.
2. $M_1,M_2\in H_2$ とする. $\det(M_1M_2)=\det M_1\det M_2\in\mathbb{R}$ より, $M_1,M_2\in H_2$. また, $M\in H_2$ の逆元 M^{-1} に対して, $\det(M^{-1})=\frac{1}{\det M}\in\mathbb{R}$ より, $M^{-1}\in H_2$.
3. $M_1,M_2\in H_3$ とすると, 適当な $a_i\in\mathbb{R}, a_i\neq 0$ により, $M_i=a_iE_n$ と書ける. よって, $M_1M_2=a_1E_na_2E_n=(a_1a_2)E_n\in H_3$. $M\in H_3$ は, $M=aE_n$ $(a\in\mathbb{R}, a\neq 0)$ と書け, $M^{-1}=a^{-1}E_n\in H_3$.

正規部分群であること

1. $M\in H_1, A\in\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ とする. $|\det(AMA^{-1})|=|\det A||\det M||\det A|^{-1}=|\det M|=1$ より, $AMA^{-1}\in H_1$.
2. $M\in H_2, A\in\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ とする. $\det(AMA^{-1})=\det A\det M(\det A^{-1})=\det M\in\mathbb{R}$ より, $AMA^{-1}\in H_2$.
3. $M=aE_n\in H_3, A\in\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ とする. $AMA^{-1}=aAE_nA^{-1}=aE_n=M\in H_3$.

http://hig3.net/(講義のページもここからたどれます), http://www.math.ryukoku.ac.jp/~hig/, mailto:hig@math.ryukoku.ac.jp, tel:0775437501 数理情報学科へや:1 号館 5 階 508.

4

1. $(10,x)=1$ となる $x=1,\cdots,9$ を考えて, $\mathbb{Z}_{10}^{\times}=\{[1]_{10},[3]_{10},[7]_{10},[9]_{10}\}$.
2. $[x]_{10}\cdot[y]_{10}=[xy]_{10}$ より, 次のようになる.

(8)

$\cdot$	$[1]_{10}$	$[3]_{10}$	$[7]_{10}$	$[9]_{10}$
$[1]_{10}$	$[1]_{10}$	$[3]_{10}$	$[7]_{10}$	$[9]_{10}$
$[3]_{10}$	$[3]_{10}$	$[9]_{10}$	$[1]_{10}$	$[7]_{10}$
$[7]_{10}$	$[7]_{10}$	$[1]_{10}$	$[9]_{10}$	$[3]_{10}$
$[9]_{10}$	$[9]_{10}$	$[7]_{10}$	$[3]_{10}$	$[1]_{10}$

3. $([3]_{10})^4=[1]_{10}$ などより, $o([1]_{10}=1, o([3]_{10}=4, o([7]_{10}=4, o([9]_{10}=2$.

5

1. $[x]_{12},[y]_{12}\in\mathbb{Z}_{12}^{+}$ とすると,

$$\phi([x]_{12}\cdot[y]_{12})=\phi([x+y]_{12})=[3(x+y)]_{12}=[3x+3y]_{12}=[3x]_{12}\cdot[3y]_{12}=\phi([x]_{12})\cdot\phi([y]_{12}) \tag{9}$$

なので群準同型写像
2. $[3x]_{12}=[0]_{12}$ すなわち, $3x\equiv 0 \mod 12$ を解くと, $x=4k$ $(k\in\mathbb{R})$. よって, $\ker\phi=\{[0]_{12},[4]_{12},[8]_{12}\}$. また, $\mathrm{Im}\ \phi=\{\phi([x]_{12})|[x]_{12}\in Z_{12}^{+}\}=\{[3x]_{12}|x=0,1,\ldots,11\}=\{[0]_{12},[3]_{12},[6]_{12},[9]_{12}\}$.
3. 同型定理より, $\mathbb{Z}_{12}^{+}/\ker\phi\simeq\mathrm{Im}\ \phi$. 位数から想像がつくが, 演算表を作ってみると, $\mathrm{Im}\ \phi\simeq\mathbb{Z}_4^{+}$.

6

$M_i=\left(\begin{smallmatrix}+a_i & +b_i\\ -b_i & +a_i\end{smallmatrix}\right)$ とする.

1. $n\times n$ 複素行列の加法群の部分群であることを示せばよい.

$$M_1\cdot M_2=\begin{pmatrix}+(a_1+a_2) & +(b_1+b_2)\\ -(b_1+b_2) & +(a_1+a_2)\end{pmatrix}\in G. \tag{10}$$

$$M_1^{-1}=\begin{pmatrix}+(-a_1) & +(-b_1)\\ -(-b_1) & +(-a_1)\end{pmatrix}\in G. \tag{11}$$

(12)

2. 全単射であり, さらに,

$$\psi(M_1\cdot M_2)=(a_1+a_2)+\sqrt{-1}\cdot(b_1+b_2)=(a_1+\sqrt{-1}\cdot b_1)+(a_2+\sqrt{-1}\cdot b_2)=\psi(M_1)\cdot\psi(M_2) \tag{13}$$

より群準同型でもあるので群同型.
3. $n\times n$ 複素行列の乗法群の部分群であることを示せばよい.

$$M_1\cdot M_2=\begin{pmatrix}+(a_1a_2-b_1b_2) & +(a_1b_2+b_1a_2)\\ -(a_1b_2+b_1a_2) & +(a_1a_2-b_1b_2)\end{pmatrix}\in H. \tag{14}$$

$$M_1^{-1}=\frac{1}{a_1^2+b_1^2}\begin{pmatrix}+(+a_1) & +(-b_1)\\ -(-b_1) & +(+a_1)\end{pmatrix}\in H. \tag{15}$$

(16)

4. 全単射であり, さらに,

(17)
$$\phi(M_1 \cdot M_2) = (a_1a_2 - b_1b_2) + \sqrt{-1} \cdot (a_1b_2 + b_1a_2) = (a_1 + \sqrt{-1} \cdot b_1) \cdot (a_2 + \sqrt{-1} \cdot b_2) = \phi(M_1) \cdot \phi(M_2)$$

より群準同型でもあるので群同型.