理論物理学特論 aka 群論☆演習 I

樋口さぶろお[1]　配布: 2004/04/12 Mon 更新: Time-stamp: "2004/04/26 Mon 13:52 hig"

2　群であることの証明の手口

すみません. 前半の問題を, '行列式が 1 の行列全体' と訂正します.

2.1　行列式が 1 の行列全体と乗法

行列式が 1 の $n \times n$ 複素行列全体を $\mathrm{SL}(n,\mathbb{C})$ と書く. これは行列の乗法に関して群になっている.

乗法が 2 項演算になっていること　$A, B \in \mathrm{SL}(n,\mathbb{C})$ とすると, $\det A = \det B = 1$. 一方, $\det(AB) = \det A \det B = 1$ より, $AB \in \mathrm{SL}(n,\mathbb{C})$

(ぐ 1)　行列の乗法なので結合則を満たす.

(ぐ 2)　単位行列 E_n は $E_n \in \mathrm{SL}(n,\mathbb{C})$ であり, $A \in \mathrm{SL}(n,\mathbb{C})$ に対して $AE_n = E_nA = A$ を満たす.

(ぐ 3)　$A \in \mathrm{SL}(n,\mathbb{C})$ の逆元は逆行列 A^{-1} で, $AA^{-1} = A^{-1}A = E_n$ を満たし, また, $A^{-1} \in \mathrm{SL}(n,\mathbb{C})$ である. なぜなら, $1 = \det E_n = \det(AA^{-1}) = \det(A)\det(A^{-1}) = \det(A^{-1})$.

2.2　行列式が 1 の行列全体と加法

群でない. 単位元は零行列であるしかないが, その行列式は 1 でない.

2.3　実対称行列全体と乗法

群でない. 零行列には逆元がない.

2.4　実対称行列全体と加法

群である.

---

http://hig3.net/(講義のページもここからたどれます), http://www.math.ryukoku.ac.jp/~hig/, mailto:hig@math.ryukoku.ac.jp, tel:0775437501 数理情報学科へや:1 号館 5 階 508.

2.5　ユニタリー行列全体と乗法

複素正方行列 U で, $U^{\mathrm{t}*}U = E$ であるものをユニタリー行列という. $n \times n$ のユニタリー行列全体を $\mathrm{U}(n)$ と書く. これは行列の乗法に関して群になっている.

乗法が 2 項演算になっていること　$U_1, U_2 \in \mathrm{U}(n)$ とすると, $(U_1U_2)(U_1U_2)^{\mathrm{t}*} = U_1U_2U_2^{\mathrm{t}*}U_1^{\mathrm{t}*} = U_1E_nU_1^{\mathrm{t}*} = E_n$. であり, $U_1, U_2 \in U(n)$.

(ぐ 1)　行列の乗法なので結合則を満たす.

(ぐ 2)　単位行列 E_n は $E_n \in \mathrm{U}(n)$ であり, $A \in \mathrm{U}(n)$ に対して $AE_n = E_nA = A$ を満たす.

(ぐ 3)　$U \in \mathrm{U}(n)$ の逆元は逆行列で, $UU^{-1} = U^{-1}U = E_n$ を満たし, また, $U^{-1} \in \mathrm{U}(n)$ である. なぜなら, $U^{-1}(U^{-1})^{\mathrm{t}*} = U^{\mathrm{t}*}U = E_n$.

3　数の群と部分群

1. $G = \mathbb{R}^+$, $H = \{a + \sqrt{2}b | a, b \in \mathbb{Z}\} \subset G$ とする. $H \leq G$ を示そう.
2. $G = \mathbb{R}^\times, H = \{a + \sqrt{2}b | a, b \in \mathbb{Q}, a + \sqrt{2}b \neq 0\} \subset G$ とする. $H \leq G$ を示そう.