理論物理学特論 aka 群論☆演習 I

樋口さぶろお[1]　配布: 2004/05/10 Mon 更新: Time-stamp: "2004/05/11 Tue 10:09 hig"

3 数の群と部分群

1. $x = a + \sqrt{2}b,\ y = c + \sqrt{2}d \in H = \{a + \sqrt{2}b | a, b \in \mathbb{Z}\}$ とする.

   和 $x + y = (a + c) + \sqrt{2}(b + d) \in H$. なぜなら $a + c, b + d \in \mathbb{Z}$.

   逆元 $-x = (-a) + \sqrt{2}(-b) \in H$. なぜなら $-a, -b \in \mathbb{Z}$.

   よって $H \leq \mathbb{R}^+$.

2. $x = a + \sqrt{2}b,\ y = c + \sqrt{2}d \in H = \{a + \sqrt{2}b | a, b \in \mathbb{Q}, a + \sqrt{2}b \neq 0\}$ とする.

   積 $xy = (ac + 2bd) + \sqrt{2}(ad + bc) \in H$. なぜなら, $ac + 2bd, ad + bc \in \mathbb{Q}$.

   逆元 $x^{-1} =$ (有理化) $= \frac{a}{a^2-2b^2} + \sqrt{2} \cdot \frac{-b}{a^2-2b^2} \in H$. なぜなら, $a, b \in \mathbb{Q}$ より $a^2 - 2b^2 \neq 0$ であり, $\frac{a}{a^2-2b^2}, \frac{-b}{a^2-2b^2} \in \mathbb{Q}$.

   よって $H \leq \mathbb{R}^\times$.

4 行列の群たち

2×2 実正則行列全体の乗法群を G とする. 部分集合

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} \mathrm{e}^x & 0 \\ y & 1 \end{pmatrix} \middle| x, y \in \mathbb{R} \right\} \subset G \tag{1}$$

に対して,

$$H \leq G \tag{2}$$

を示そう.

`http://hig3.net/`(講義のページもここからたどれます), `http://www.math.ryukoku.ac.jp/~hig/`, `mailto:hig@math.ryukoku.ac.jp`, `tel:0775437501` 数理情報学科へや:1 号館 5 階 508.