理論物理学特論 aka 群論☆演習 I

樋口さぶろお[1] 配布: 2004/06/14 Mon 更新: Time-stamp: "2004/06/15 Tue 15:31 hig"

8 群同型と群準同型

1. $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^+$ とする. $\phi(x_1 \circ x_2) = \phi(x_1 + x_2) = \mathrm{e}^{x_1+x_2} = \mathrm{e}^{x_1} \times \mathrm{e}^{x_2} = \phi(x_1) \times \phi(x_2) = \phi(x_1) \cdot \phi(x_2)$ より, 群準同型写像である.

   $\phi(x) = -1 \in \mathbb{R}^\times$ となる $x \in \mathbb{R}^+$ はないので, 全射でない. したがって群同型写像ではない. 単射ではある.

   単位元 $1 \in \mathbb{R}^\times$ に対して, $1 = \phi(x)$ を解くと, $x = 0$. よって, $\ker \phi = \{0\}$.

   また, $\mathrm{Im}\ \phi = \{\mathrm{e}^x | x \in \mathbb{R}^+\} = \{y \in \mathbb{R} | y > 0\}$.

2. $x_1, x_2 \in \mathbb{Z}^+$ とする. $\phi(x_1 \circ x_2) = \phi(x_1 + x_2) = m(x_1 + x_2) = mx_1 + mx_2 = \phi(x_1) + \phi(x_2) = \phi(x_1) \cdot \phi(x_2)$ よって準同型写像である. $m = \pm 1$ の時は明らかに群同型写像. $m \neq \pm 1$ の時は, 全射でないので ($\phi(x) = |m| + 1$ となるような x はない), 群同型写像ではない. 単射ではある.

   単位元 $0 \in \mathbb{Z}^+$ に対して $0 = mx$ を解くと $x = 0$. よって $\ker \phi = \{0\}$.

   $\mathrm{Im}\phi = \{mx | x \in \mathbb{Z}\} = (m$ の倍数全体).

3. $M_1, M_2 \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ とする. $\phi(M_1 \circ M_2) = \det(M_1 M_2) = \det(M_1)\det(M_2) = \phi(M_1) \times \phi(M_2) = \phi(M_1) \cdot \phi(M_2)$. よって準同型写像である.

   単射でない (例えば, 非対称行列 M に対して $\det M = \det M^{\mathrm{t}}$) ので, 群同型写像でない. 全射ではある.

   単位元 $1 \in \mathbb{R}^\times$ に対して, $\phi(M) = 1$ とすると, $\det M = 1$. よって, $\ker \phi = \mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$.

   対角成分を $x, 1, 1, \cdots, 1$ とする対角行列を考えると, 行列式の値は, 任意の $x \neq 0$ とできるので, $\mathrm{Im}\phi = \mathbb{R}^\times$.

9 巡回群

1. $\mathbb{Z}_{12}^+$ の各元の位数を求めよう.

2. $\mathbb{Z}_{12}^+$ の生成元をすべて求めよう.

3. $\mathbb{Z}_+$ と $m\mathbb{Z}_+$ (m は 0 でない整数) は群同型であることを示そう.

http://hig3.net/(講義のページもここからたどれます), http://www.math.ryukoku.ac.jp/~hig/, mailto:hig@math.ryukoku.ac.jp, tel:0775437501 数理情報学科へや:1 号館 5 階 508.