理論物理学特論ファイナルトライアル

樋口さぶろお[1] 配布: 2005/08/01 Mon 更新: Time-stamp: "2005/08/02 Tue 11:16 hig"

注意

1. **外部記憶ペーパーA4片面持込可**
2. 過程も答えよう. 最終的な答えが正しいことがわかるような過程を記そう.
3. 問題文に現れない記号を使うときは, 定義を記そう.

1

複素数の集合 $G = \{\mathrm{e}^{i\theta} | 0 \leq \theta < 2\pi\}$ は, 複素数の乗法に関して群になる. 2×2 行列の集合 $H = \left\{ \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix} \middle| 0 \leq \phi < 2\pi \right\}$ は行列の乗法に関して群になる. 群 G と群 H が同型であることを示そう.

2

乗法を演算とする実数の群 $\mathbb{R}^*$ から, その部分群 $H = \{+1, -1\}$ への写像 $f : \mathbb{R}^* \to H$ を次のように定める.

$$f(x) = \begin{cases} +1 & (x > 0) \\ -1 & (x < 0) \end{cases} \tag{1}$$

このとき f が準同型写像であることを示し, $\mathrm{Im} f, \ker f$ を求めよう.

3

2×2 実正則行列全体の乗法群を G とする. 部分集合

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & y \\ 0 & \mathrm{e}^x \end{pmatrix} \middle| x, y \in \mathbb{R} \right\} \subset G \tag{2}$$

を考える.

1. H は G の部分群であることを示そう.
2. H は G の正規部分群であるかどうか判定しよう.

http://hig3.net/(講義のページもここからたどれます), へや:1 号館 5 階 502

4

置換群 S_5 を考える．

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}, \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 5 & 2 & 3 \end{pmatrix} \tag{3}$$

とする．

1. 積 $\sigma\tau$ を求めよう．
2. 逆元 σ^{-1} を求めよう．
3. σ を互換の積として書こう．
4. σ は偶置換か，奇置換か答えよう．

5

加法を演算とする整数の剰余群 $G = \mathbb{Z}_3, H = \mathbb{Z}_6$ を考える．

1. $f_1 : G \ni [x]_3 \mapsto [x]_6 \in H$ ただし $x = 0, 1, 2$ は準同型写像かどうか答えよう．準同型写像なら $\mathrm{Im} f_1$, $\ker f_1$ を求めよう．
2. $f_2 : H \ni [x]_6 \mapsto [x]_3 \in G$ は準同型写像かどうか答えよう．準同型写像なら $\mathrm{Im} f_2$, $\ker f_2$ を求めよう．
3. $f_3 : G \ni [x]_3 \mapsto [2x]_6 \in H$ は準同型写像かどうか答えよう．準同型写像なら $\mathrm{Im} f_3$, $\ker f_3$ を求めよう．

$\boxed{\text{おしまい}}$

理論物理学特論ファイナルトライアル略解

樋口さぶろお[2]　配布: 2005/08/01 Mon 更新: Time-stamp: "2005/08/02 Tue 11:16 hig"

ご注意とお願い　この略解は注意深く作成しているつもりですが, 間違いが含まれていることがあります. 後から間違いに気づいたときは Web に訂正版を置いています. 特に次年度以降の試験勉強に利用される場合, Web から最新版を入手されることをお奨めします. `http://hig3.net` > 去年より前の授業 > 科目名

配点: 1,2,3,4,5 各 20 点. 計 100 点.

1

写像 $f : G \ni \mathrm{e}^{i\theta} \mapsto \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \in H$ を考えると, f は全単射である.

f が準同型写像であることは次のように示される.

$$f(\mathrm{e}^{i\theta_1})f(\mathrm{e}^{i\theta_2}) = \begin{pmatrix} \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 \\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\theta_2 & -\sin\theta_2 \\ \sin\theta_2 & \cos\theta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta_1+\theta_2) & -\sin(\theta_1+\theta_2) \\ \sin(\theta_1+\theta_2) & \cos(\theta_1+\theta_2) \end{pmatrix}.$$

$$f(\mathrm{e}^{i\theta_1}\mathrm{e}^{i\theta_2}) = f(\mathrm{e}^{i\theta_1+\theta_2}) = \begin{pmatrix} \cos(\theta_1+\theta_2) & -\sin(\theta_1+\theta_2) \\ \sin(\theta_1+\theta_2) & \cos(\theta_1+\theta_2) \end{pmatrix} = f(\mathrm{e}^{i\theta_1})f(\mathrm{e}^{i\theta_2}).$$

2

$x, y \neq 0$ が同符号のとき

$$f(xy) = +1 = (+1) = f(x)f(y). \tag{4}$$

$x, y \neq 0$ が異符号のとき

$$f(xy) = -1 = f(x)f(y). \tag{5}$$

よって, 準同型写像. $\mathrm{Im} f = H$, $\ker f = \{x | x > 0\}$.

3

1. $g_1 = \begin{pmatrix} 1 & y_1 \\ 0 & \mathrm{e}^{x_1} \end{pmatrix}$ $g_2 = \begin{pmatrix} 1 & y_2 \\ 0 & \mathrm{e}^{x_2} \end{pmatrix}$ とおく.

$$g_1 g_2 = \begin{pmatrix} 1 & y_2 + y_1\mathrm{e}^{x_2} \\ 0 & \mathrm{e}^{x_1+x_2} \end{pmatrix} \in H. \tag{6}$$

$$g_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -y_1\mathrm{e}^{x_1} \\ 0 & \mathrm{e}^{-x_1} \end{pmatrix} \in H \tag{7}$$

より部分群である.

`http://hig3.net`(講義のページもここからたどれます), へや:1 号館 5 階 502.

2. $\left(\begin{smallmatrix}1&1\\0&1\end{smallmatrix}\right) \in H$ であるが, $g = \left(\begin{smallmatrix}1&0\\1&1\end{smallmatrix}\right) \in G$ に対して $ghg^{-1} = \left(\begin{smallmatrix}0&1\\-1&2\end{smallmatrix}\right) \notin H$ より, 正規部分群ではない.

4

1.
$$\sigma\tau = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 5 & 4 & 2 & 3 & 1\end{pmatrix}.$$

2.
$$\sigma^{-1} = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 3 & 5 & 2 & 4 & 1\end{pmatrix}.$$

3. 書き表し方は一通りではない.
$$\sigma = (12)(23)(15).$$

4. 奇数個の互換で書き表せるので, 奇置換.

5

1. $f_1([2]_3 + [2]_3]) = f_1([1]_3) = [1]_6 \neq [4]_6 = [2]_6 + [2]_6 = f_1([2]_6) + f_1([2]_6)$ より準同型写像ではない.
2. $f_2([x]_6 + [y]_6) = f_2([x+y]_6) = [x+y]_3 = [x]_3 + [y]_3 = f_2([x]_6) + f_2([y]_6)$ より準同型写像. $\mathrm{Im} f_2 = G, \ker f_2 = \{[0]_6, [3]_6\}$.
3. $f_3([x]_3 + [y]_3) = f_3([x+y]_3) = [2(x+y)]_6 = [2x]_6 + [2y]_6 = f_3([x]_3) + f_2([y]_3)$ より準同型写像. $\mathrm{Im} f_2 = \{[0]_6, [2]_6, [4]_6\} \subset H, \ker f_2 = \{[0]_3\}$.