理論物理学特論ファイナルトライアル

樋口さぶろお[1] 配布: 2005/08/02 Tue 更新: Time-stamp: "2005/07/26 Tue 19:19 hig"

注意

1. **外部記憶ペーパー A4 片面持込可**
2. 過程も答えよう. 最終的な答えが正しいことがわかるような過程を記そう.
3. 問題文に現れない記号を使うときは, 定義を記そう.

1

$n \times n$ の直交行列全体の集合 G を考える. ただし, 直交行列とは, 実数の行列 M で, ${}^{\mathrm{t}}M = M^{-1}$ を満たすものをいう. ここで, ${}^{\mathrm{t}}M$ は M の転置行列を表す.

G が, 行列の乗法を演算として, 群になっていることを示そう.

2

乗法を演算とする実数全体の群 $G = \mathbb{R}^*$ を考える. 有理数全体の集合を $\mathbb{Q}$ と書く. 部分集合

$$H = \{p + \sqrt{2} \cdot q \mid p, q \in \mathbb{Q}, (p, q) \neq (0, 0)\} \subset G \tag{1}$$

は部分群であることを示そう.

3

ベクトルの集合 $G = \{(x, y)|x, y \in \mathbb{R}\}$ と, G 上の 2 種類の演算 $\bullet, \circ$ を考える. ここで,

$$(x_1, y_1) \bullet (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 y_2 \mathrm{e}^{x_1}) \tag{2}$$

$$(x_1, y_1) \circ (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 \mathrm{e}^{x_2} + y_2) \tag{3}$$

である.

1. 演算 $\circ$ に関して, G が群になるかどうか, 理由をつけて答えよう.
2. 演算 $\bullet$ に関して, G が群になるかどうか, 理由をつけて答えよう.

4

加法を演算とする実数の群 $\mathbb{R}^+$ から, 乗法を演算とする複素数の群 $\mathbb{C}^*$ への写像 $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{C}^*$ を次のように定める.

$$f(x) = \cos x + i \sin x \tag{4}$$

このとき f が準同型写像であることを示し, $\mathrm{Im} f, \ker f$ を求めよう.

http://hig3.net/(講義のページもここからたどれます), へや:1 号館 5 階 502

5

乗法を演算とする整数の剰余群 $\mathbb{Z}_9^*$ を考える.

1. $\mathbb{Z}_9^*$ の元を, ($[x]_9$ という形で) すべて求めよう.
2. 上で求めた元の間の演算表を作ろう.
3. 上で求めたそれぞれの元の位数を求めよう.