理論物理学特論 aka 群論☆演習 I

樋口さぶろお[1]
配布: 2005/06/20 Mon 更新: Time-stamp: "2005/06/19 Sun 19:27 hig"

9 略解 – 群と変換

1. (さ 1) $g, h \in G$ とする. $\phi_{g_1}(\phi_{g_2}(h)) = \phi_{g_1}(g_2 h g_2^{-1}) = g_1 g_2 h g_2^{-1} g_1^{-1}$. 一方, $\phi_{g_1 g_2}(h) = (g_1 g_2) h (g_1 g_2)^{-1} = g_1 g_2 h g_2^{-1} g_1^{-1}$.

   (さ 2) $\phi_e(h) = ehe^{-1} = h$.

10 準同型写像/軌道/固定部分群

1. 次の写像について, それぞれ群同型写像であるかどうか, 群準同型写像であるかどうか考えよう. 群準同型写像であるなら値域 $\phi(G) = \mathrm{Im}\,\phi$ を求めよう.

   (a) $\phi : \mathbb{R} \ni x \mapsto \mathrm{e}^x \in \mathbb{R}^*$. ただし, $\mathbb{R}$ の演算は加法, $\mathbb{R}^*$ の演算は乗法.

   (b) $\phi : \mathbb{Z} \ni x \mapsto mx \in \mathbb{Z}$. ただし, $m \in \mathbb{Z}, m \neq 0$, $\mathbb{Z}$ の演算は加法

   (c) $\phi : \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) \ni M \mapsto \det M \in \mathbb{R}^*$. ただし, $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ は, $n \times n$ 実正則行列の乗法に関する群.

2. 長方形 R の対称群 $G = \{e, \tau_1, \tau_2, \sigma\}$ は, R に作用している. ただし, τ_1, τ_2 は, それぞれ長辺, 短辺に平行な軸に関する鏡映, σ は中心のまわりの π 回転である.

   (a) R のいろんな点の軌道を描いてみよう.

   (b) 長方形の中心 $x_0 \in R$ の固定部分群を求めよう.

   (c) 長方形の長辺に平行な軸上の点 $x_1 \in R$ の固定部分群を求めよう.

   (d) 長方形の軸上にはない点 $x_2 \in R$ の固定部分群を求めよう.

   (e) 自然な準同型写像 $\phi : G \to \mathrm{GL}(2, \mathbb{R})$ を考え, $\phi(e), \phi(\tau_1), \phi(\tau_2), \phi(\sigma)$ を求めよう. ただし, $\mathrm{GL}(2, \mathbb{R})$ は, 2×2 実正則行列の乗法に関する群.

http://hig3.net/(講義のページもここからたどれます), mailto:hig@math.ryukoku.ac.jp, tel:0775437514 数理情報学科へや:1 号館 5 階 502.