理論物理学特論 aka 群論☆演習 I

樋口さぶろお[1] 配布: 2005/06/27 Mon 更新: Time-stamp: "2005/06/28 Tue 09:07 hig"

10 略解 – 準同型写像/軌道/固定部分群

1. (a) $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^+$ とする. $\phi(x_1 \circ x_2) = \phi(x_1 + x_2) = \mathrm{e}^{x_1+x_2} = \mathrm{e}^{x_1} \times \mathrm{e}^{x_2} = \phi(x_1) \times \phi(x_2) = \phi(x_1) \cdot \phi(x_2)$ より, 群準同型写像である.

   $\phi(x) = -1 \in \mathbb{R}^*$ となる $x \in \mathbb{R}^+$ はないので, 全射でない. したがって群同型写像ではない. 単射ではある.

   また, $\mathrm{Im}\,\phi = \{\mathrm{e}^x | x \in \mathbb{R}^+\} = \{y \in \mathbb{R} | y > 0\}$.

   (b) $x_1, x_2 \in \mathbb{Z}^+$ とする. $\phi(x_1 \circ x_2) = \phi(x_1 + x_2) = m(x_1 + x_2) = mx_1 + mx_2 = \phi(x_1) + \phi(x_2) = \phi(x_1) \cdot \phi(x_2)$ よって準同型写像である. $m = \pm 1$ の時は明らかに群同型写像. $m \neq \pm 1$ の時は, 全射でないので ($\phi(x) = |m| + 1$ となるような x はない), 群同型写像ではない. 単射ではある.

   $\mathrm{Im}\,\phi = \{mx | x \in \mathbb{Z}\} = (m$ の倍数全体$)$.

   (c) $M_1, M_2 \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ とする. $\phi(M_1 \circ M_2) = \det(M_1 M_2) = \det(M_1)\det(M_2) = \phi(M_1) \times \phi(M_2) = \phi(M_1) \cdot \phi(M_2)$. よって準同型写像である.

   単射でない (例えば, 非対称行列 M に対して $\det M = \det M^{\mathrm{t}}$) ので, 群同型写像でない. 全射ではある.

   対角成分を $x, 1, 1, \cdots, 1$ とする対角行列を考えると, 行列式の値は, 任意の $x \neq 0$ とできるので, $\mathrm{Im}\,\phi = \mathbb{R}^*$.

2. (a)

   (b) $G_{x_0} = G$.

   (c) $G_{x_1} = \{e, \tau_1\}$.

   (d) $G_{x_2} = \{e\}$.

   (e) 長軸が y 軸, 短軸が x 軸上にあるとすると,

$$\phi(e) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \phi(\tau_1) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \phi(\tau_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \phi(\sigma) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

[1]
http://hig3.net/(講義のページもここからたどれます), mailto:hig@math.ryukoku.ac.jp, tel:0775437514 数理情報学科へや:1 号館 5 階 502.

11 quiz – 正規部分群

1. n 次の対称群 S_n と交代群 A_n に対して, $\mathrm{A}_n \triangleleft \mathrm{S}_n$ を示そう.

2. 実数を成分とする $n \times n$ 正則行列の (乗法に関する) 群を $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ と書く. 群 $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$ を, 行列式が 1 の行列からなる, $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ の部分群とする. 関係 $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R}) \triangleleft \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ を示そう.

3. 実数を成分とする $n \times n$ 正則行列の (乗法に関する) 群を $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ と書く. $H = \{h \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) | h = \mathrm{diag}(x, x, \ldots, x), x \neq 0\}$ は, 単位行列の x 倍 (ただし $x \neq 0$) からなる部分群である. 関係 $H \triangleleft \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ を示そう.

授業を録画した MPEG2 ファイルを DVD-R で貸し出してます. 欠席した際などにご利用ください.

`http://hig3.net`

科目のページ ＋ リクエスト/質問/苦情用掲示板