理論物理学特論 aka 線形代数・演習 III ファイナルトライアル

樋口さぶろお[1] 配布: 2009-07-23 Thu 更新: Time-stamp: "2009-07-27 Mon 17:20 JST hig"

ファイナルトライアル参加案内

1. **両面です．全部で 6 問です．**
2. **外部記憶ペーパー 10 分，答案 80 分です．**
3. 過程も答えよう．最終的な答えが正しいことがわかるような過程を記そう．
4. 問題文に現れない記号を使うときは，定義を記そう．

1

行列 $X = \begin{pmatrix} 0 & +\theta \\ -\theta & 0 \end{pmatrix}$ $(\theta \in \mathbb{R})$ に対して，e^X を求めよう．

2

1. $m \times m$ 行列 A, B, C が $[A, B] = C$ を満たすとき，交換子積 $[3A + 4B, 5A + 6B]$ を C で表そう．
2. $m \times m$ 行列 A, B が $[A, B] = E$ (E は単位行列) を満たすとき，$n \geq 0$ に対して交換子積 $[A, B^n] = nB^{n-1}$ を示そう．
3. $m \times m$ 行列 A, B, C が $[A, B] = C, [A, C] = E$ (E は単位行列) を満たすとき，$[A, [B, C]]$ を簡単化しよう．

3

$m \times m$ 行列の集合 $\mathfrak{g} = \{X | {}^{\mathrm{t}}X = -X, X \in \mathfrak{gl}(m, \mathbb{C})\}$ を考える．

1. $\mathfrak{g}$ が Lie 代数であることを示そう．
2. $\mathfrak{g}$ の次元を求めよう．
3. $m = 3$ のとき，$\mathfrak{g}$ の線形空間としての基底をひとつ求めよう．

---

[1] Copyright ©2009 Saburo HIGUCHI. All rights reserved.
hig@math.ryukoku.ac.jp, http://hig3.net(講義のページもここからたどれます), へや:1 号館 5 階 502.

4

Kronecker の δ 記号 $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & (i=j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases}$ を含む次の式を計算して簡単化しよう．ただし，定数 n は自然数，F_{ijk}, F_{ij}, G_{km} は添字を持つ定数．

1. $\displaystyle\sum_{i,j,k,\ell=1}^{n} \delta_{ij}\delta_{jk}\delta_{k\ell}\delta_{\ell i}.$
2. $\displaystyle\sum_{i,j,k,\ell=1}^{n} \delta_{ij}\delta_{jk}\delta_{ki}\delta_{\ell\ell}.$
3. $\displaystyle\sum_{i,j,k=1}^{n} F_{ijk}\delta_{ij}\delta_{km}.$
4. $\displaystyle\sum_{i,j,k=1}^{n} F_{ij}\delta_{jk}G_{km}\delta_{mi}.$

5

$\mathfrak{g}$ を $\mathfrak{gl}(m,\mathbb{C})$ の部分 Lie 代数とする．正則行列 $T \in \mathfrak{gl}(m,\mathbb{C})$ と $\theta \in \mathbb{C}$ に対して，次で定められる写像 $f(T,\theta) : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ を考える．

$$f(T,\theta)(X) = TXT^{-1} + \theta X$$

1. f が線形写像であることを示そう．
2. $[f(T,\theta)(X), f(T,\theta)(Y)]$ と　$f(T,\theta)([X,Y])$ を求めよう (定義をそのまま書くだけでいい．しかし我慢できなかったら簡単化してもいい)．
3. $\theta = 0$ のとき，f が Lie 代数の準同型写像であることを示そう．

6

2×2 行列の集合 $\mathfrak{g} = \{ \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & c \end{smallmatrix}\right) |\ a,b,c \in \mathbb{C} \}$. は 3 次元の Lie 代数になっている．基底として，$\langle e_1, e_2, e_3 \rangle = \langle \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \rangle$ を採用する．

1. $X = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & c \end{smallmatrix}\right) \in \mathfrak{g}$ を固定したとき，$W = \mathrm{ad}(X)(Z) = [X,Z]$ は $Z \in \mathfrak{g}$ を $W \in \mathfrak{g}$ に写す線形写像と見なせる．この線形写像 $\mathrm{ad}(X)$ の，上で指定された基底のもとでの表現行列を求めよう．
2. $X, Y \in \mathfrak{g}$ とするとき，$\mathfrak{g}$ の Killing 形式 $B(X,Y)$ は，表現行列の積のトレースとして，$B(X,Y) = \mathrm{Tr}(\mathrm{ad}(X)\mathrm{ad}(Y))$ と定義される．$X = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & c \end{smallmatrix}\right), Y = \left(\begin{smallmatrix} p & q \\ 0 & r \end{smallmatrix}\right)$ とするとき，$B(X,Y)$ を a,b,c,p,q,r で表そう．
3. $\mathfrak{g}$ が半単純であるかどうか判定しよう．

理論物理学特論 aka 線形代数・演習 III ファイナルトライアル略解

樋口さぶろお[2] **配布**: 2009-07-23 Thu **更新**: Time-stamp: "2009-07-27 Mon 17:20 JST hig"

1

行列 X の固有値は $\lambda = \pm i\theta$, 固有ベクトルは $\boldsymbol{v}_\pm = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ \pm i \end{smallmatrix}\right)$. (ユニタリな) 基底変換行列 $P = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ +i & -i \end{smallmatrix}\right)$ によって, $X = PDP^{-1} = P\left(\begin{smallmatrix} i\theta & 0 \\ 0 & -i\theta \end{smallmatrix}\right)P^{-1}$ とかけるので,

$$\mathrm{e}^X = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}X^n = P\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}D^nP^{-1} = P\left(\begin{smallmatrix} \mathrm{e}^{i\theta} & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{-i\theta} \end{smallmatrix}\right)P^{-1} = \left(\begin{smallmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{smallmatrix}\right)$$

2

1. $[3A+4B, 5A+6B] = 18[A,B] + 20[B,A] = -2[A,B] = -2C$.
2. 数学的帰納法による. $n=0$ のとき両辺 O で成立. $k=n$ のとき成立すると仮定すると, 交換子積 $[A, BC] = B[A,C] + [A,B]C$ より

   $$[A, B^{n+1}] = B[A, B^n] + [A,B]B^n = nBB^{n-1} + EB^n = (n+1)B^n.$$

   よって $k = n+1$ に対しても成立する. よって一般の $n \geq 0$ に対して成立する.
3. Jacobi の恒等式を用いて,

   $$[A,[B,C]] = -[B,[C,A]] - [C,[A,B]] = -[B,-E] - [C,C] = O.$$

3

1. 略. これは直交 Lie 代数 $\mathfrak{o}(m, \mathbb{C})$.
2. m^2 個の成分に対して $X_{ii} = 0, X_{ij} = -X_{ij}$ という制限が課されるので, $\frac{1}{2}(m-1)m$ 次元.
3. $\left\langle \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{smallmatrix}\right) \right\rangle$.

[2]Copyright ©2005-2007 Saburo HIGUCHI. All rights reserved.
hig@math.ryukoku.ac.jp, http://hig3.net(講義のページもここからたどれます), へや:1 号館 5 階 502.

4

- n.
- n^2.
- $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} F_{iim}$.
- $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} F_{mj} G_{jm}$.

5

1. **略**.
2. $[f(T,\theta)(X), f(T,\theta)(Y)] = [TXT^{-1}+\theta X, TYT^{-1}+\theta Y] = T[X,Y]T^{-1}+\theta^2[X,Y]+\theta[X,TYT^{-1}]+\theta[TYT^{-1},Y]$.

   $f(T,\theta)([X,Y]) = T[X,Y]T^{-1}+\theta[X,Y]$.
3. **上で**, $\theta=0$ **のとき** 2 **つの元は一致するので**, **この写像** $f(T,0)$ **は交換子積を保つ**. **線形写像であることとあわせて**, **これは** Lie **代数の準同型写像**.

6

1. $X = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & c \end{smallmatrix}\right), Z = \left(\begin{smallmatrix} p & q \\ 0 & r \end{smallmatrix}\right)$ **とすると**, $\mathrm{ad}(X)(Z) = [X,Z] = \left(\begin{smallmatrix} 0 & aq+br+bp+cq \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$. **よって表現行列は** $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ b & a+c & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
2. $B(X,Y) = \mathrm{Tr}\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ b & a+c & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ q & p+r & q \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = (a+c)(q+r)$.
3. $c=-a\neq 0$ **であるような** X **に対しては**, **任意の** Y **に対して** $B(X,Y)=0$. **よって半単純ではない**.

http://hig3.net