理論物理学特論aka線形代数・演習III

樋口さぶろお[1] 配布: 2009-04-16 Thu 更新: Time-stamp: "2009-04-16 Thu 08:22 JST hig"

1 略解 – 行列の指数関数

1. $\mathrm{e}^X = \begin{pmatrix} \cosh 2 & \sinh 2 \\ \sinh 2 & \cosh 2 \end{pmatrix}$.
2. $\mathrm{e}^O = E$.
3. $\mathrm{e}^X = E + X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
4. $\mathrm{e}^X = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^1 & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{-2} \end{pmatrix}$.
5. X の固有値 $\lambda_\pm = \pm 2$, 固有ベクトル $v_{+2} = \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}, v_{-2} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix}$. よって X は $P = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 1 \\ 1 & -\sqrt{3} \end{pmatrix}$ により,
$$X = PDP^{-1}, \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$
と対角化される. よって
$$\mathrm{e}^X = P\mathrm{e}^D P^{-1} = P \begin{pmatrix} \mathrm{e}^2 & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{-2} \end{pmatrix} P^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3\mathrm{e}^2 + \mathrm{e}^{-2} & \sqrt{3}(\mathrm{e}^2 - \mathrm{e}^{-2}) \\ \sqrt{3}(\mathrm{e}^2 - \mathrm{e}^{-2}) & \mathrm{e}^2 - \mathrm{e}^{-2} \end{pmatrix}.$$

2 quiz – 行列の指数関数の性質

1. $X(t) = \begin{pmatrix} 1 & t \\ t^2 & t^3 \end{pmatrix}$ のとき $((X(t))^2)'$ を求めよう.
2. 2×2 行列 $Y(t)$ に対する常微分方程式
$$Y'(t) = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix} Y(t), \quad Y(0) = -2E$$
の解をあてずっぽうで求めて確かめよう.
3. 任意の実数 t に対して e^{tX} の行列式が 1 であるための X の条件を求めよう.

hig@math.ryukoku.ac.jp, http://hig3.net(講義のページもここからたどれます), へや:1 号館 5 階 502.