理論物理学特論aka線形代数・演習III

樋口さぶろお[1] 配布: 2009-04-30 Thu 更新: Time-stamp: "2009-04-30 Thu 07:38 JST hig"

3 略解 – 行列の指数関数の解析的性質

1. $(X^2)' = X'X + XX' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2t & 3t^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & t \\ t^2 & t^3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & t \\ t^2 & t^3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2t & 3t^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3t^2 & 1+4t^3 \\ 2t+5t^4 & 3t^2+6t^5 \end{pmatrix}$.
   X^2 を成分表示して微分してもいい.
2. $Y(t) = -2\mathrm{e}^{t\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}}$ は解であり初期条件も満たしている.
3. 対称なので $\mathrm{e}^{tX} = {}^{\mathrm{t}}(\mathrm{e}^{tX}) = \mathrm{e}^{t({}^{\mathrm{t}}X)}$. 両辺を t で微分して $X\mathrm{e}^{tX} = {}^{\mathrm{t}}X\mathrm{e}^{t({}^{\mathrm{t}}X)}$. よって $X = {}^{\mathrm{t}}X$.

4 quiz – 行列の指数関数による微分方程式系の解

1. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -9 & -6 \end{pmatrix}$ の Jordan の標準形を求めよう. 基底変換行列 P を求めよう.
2. $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ の Jordan の標準形を求めよう. 基底変換行列 P を求めよう.

課題:群の定義

解答は紙に作成して, スキャンしたもの (後述) を

ReLS `https://r-els.media.ryukoku.ac.jp` → 理論物理学特論 aka 線形代数・演習 III

のフォーラムに投稿してください.

スキャンは, 自宅や実験室ににスキャナがあればそれを使ってくれてもいいし, 理工学部実習室 1-612, 3 号館地下第 2 セルフラーニング室, 樋口の研究室 1-502 で行えます.

`http://www.a.math.ryukoku.ac.jp/~hig/info/teaching/scanner.php`

1. 実 $N \times N$ 行列全体の集合は行列の乗法を演算として群ではないことを示そう.
2. M が実 $N \times N$ 行列のとき $\{M| \det M \neq 0\}$ は行列の乗法を演算として群であることを示そう.
3. M が実 $N \times N$ 行列のとき $\{M| \, |\det M| = 1\}$ は行列の乗法を演算として群であることを示そう.

`hig@math.ryukoku.ac.jp`, `http://hig3.net`(講義のページもここからたどれます), へや:1 号館 5 階 502.

4. M が実 $N \times N$ 行列のとき $\{M | \det M > 0\}$ は行列の乗法を演算として群であることを示そう.

5. M が実 $N \times N$ 行列のとき $\{M | \det M < 0\}$ は行列の乗法を演算として群でないことを示そう.

6. 直交行列全体は行列の乗法を演算として群であることを示そう.

7. Unitary 行列全体は行列の乗法を演算として群であることを示そう.

8. 対称行列全体は行列の乗法を演算として群ではないことを示そう.

9. Hermite 行列全体は行列の乗法を演算として群ではないことを示そう.

10. $G = \left\{ \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \middle| \theta \in \mathbb{R} \right\}$ は行列の乗法を演算として群であることを示そう.

11. Hermite 行列全体は行列の乗法を演算として群ではないことを示そう.

12. $G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ は行列の乗法を演算として群であることを示そう.

13. $G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ +\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & +\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \right\}$ は行列の乗法を演算として群であることを示そう.

14. $\{\lambda E | \lambda \neq 0\}$ は行列の乗法を演算として群であることを示そう.

15. $\{\lambda E | \lambda > 0\}$ は行列の乗法を演算として群であることを示そう.

16. $\{\lambda E | \, |\lambda| > 1\}$ は行列の乗法を演算として群ではないことを示そう.

17. $\{\lambda E | \lambda < 0\}$ は行列の乗法を演算として群ではないことを示そう.

18. $N \times N$ 実行列 M に対して $\{M | \mathrm{tr} M = 0\}$ は行列の乗法を演算として群ではないことを示そう.

今日の範囲に対応する教科書のお奨め問題

松本 6.7

目次 前回 次回 略解