理論物理学特論aka線形代数・演習III

樋口さぶろお[1] 配布: 2009-05-07 Thu 更新: Time-stamp: "2009-05-06 Wed 14:16 JST hig"

4 略解 – 行列の指数関数による微分方程式系の解

1. $\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$. 例えば $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$.
2. $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. 例えば $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

5 quiz – Lie 群と Lie 代数

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$ に対して $[A, B], [A, [A, B]]$ を求めよう.
2. $\mathfrak{g} = \{M |\ M$ は $N \times N$ 実行列, $\mathrm{tr} M = 0\}$ が Lie 代数になっていることを示そう.

Hint. $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$ であることを使っていい.

3. 任意の正方行列 A, B, C に対して, Jacobi の恒等式 $[A, [B, C]] + [B, [C, A]] + [C, [A, B]] = 0$ が成り立つことを示そう.

課題:群の定義

解答は紙に作成して, スキャンしたもの (後述) を

ReLS `https://r-els.media.ryukoku.ac.jp` → 理論物理学特論 aka 線形代数・演習 III

のフォーラムに投稿してください.

スキャンは, 自宅や実験室ににスキャナがあればそれを使ってくれてもいいし, 理工学部実習室 1-612, 3 号館地下第 2 セルフラーニング室, 樋口の研究室 1-502 で行えます.

`http://www.a.math.ryukoku.ac.jp/~hig/info/teaching/scanner.php`

1. 実 $N \times N$ 行列全体の集合は行列の乗法を演算として群ではないことを示そう.
2. M が実 $N \times N$ 行列のとき $\{M |\det M \neq 0\}$ は行列の乗法を演算として群であることを示そう.
3. M が実 $N \times N$ 行列のとき $\{M |\ |\det M| = 1\}$ は行列の乗法を演算として群であることを示そう.

[1]
hig@math.ryukoku.ac.jp, http://hig3.net(講義のページもここからたどれます), へや:1 号館 5 階 502.

4. M が実 $N \times N$ 行列のとき $\{M | \det M > 0\}$ は行列の乗法を演算として群であることを示そう.

5. M が実 $N \times N$ 行列のとき $\{M | \det M < 0\}$ は行列の乗法を演算として群でないことを示そう.

6. 直交行列全体は行列の乗法を演算として群であることを示そう.

7. Unitary 行列全体は行列の乗法を演算として群であることを示そう.

8. 対称行列全体は行列の乗法を演算として群ではないことを示そう.

9. Hermite 行列全体は行列の乗法を演算として群ではないことを示そう.

10. $G = \left\{ \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \middle| \theta \in \mathbb{R} \right\}$ は行列の乗法を演算として群であることを示そう.

11. Hermite 行列全体は行列の乗法を演算として群ではないことを示そう.

12. $G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ は行列の乗法を演算として群であることを示そう.

13. $G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ +\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & +\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \right\}$ は行列の乗法を演算として群であることを示そう.

14. $\{\lambda E | \lambda \neq 0\}$ は行列の乗法を演算として群であることを示そう.

15. $\{\lambda E | \lambda > 0\}$ は行列の乗法を演算として群であることを示そう.

16. $\{\lambda E |\, |\lambda| > 1\}$ は行列の乗法を演算として群ではないことを示そう.

17. $\{\lambda E | \lambda < 0\}$ は行列の乗法を演算として群ではないことを示そう.

18. $N \times N$ 実行列 M に対して $\{M | \mathrm{tr} M = 0\}$ は行列の乗法を演算として群ではないことを示そう.

今日の範囲に対応する教科書のお奨め問題

佐藤 問 1.1-1.8,§1

目次 前回 次回 略解