理論物理学特論aka線形代数・演習III

樋口さぶろお[1] 配布: 2009-06-11 Thu 更新: Time-stamp: "2009-06-12 Fri 21:21 JST hig"

6 略解 – Lie代数の定義と例

6.1 略解:Lie代数の例

1. (り 1) は OK. $[X,Y]$ の 1 行 2 列を計算すると, $(a\cdot 0+0\cdot h)-(e\cdot 0-0\cdot d)=0$. よって (り 2) は成立.
2. $X,Y\in\mathfrak{o}(2,\mathbb{C})$ とすると, $X=\begin{pmatrix}0&x\\-x&0\end{pmatrix}, Y=\begin{pmatrix}0&y\\-y&0\end{pmatrix}$ とかける. このとき (り 1) は OK. $[X,Y]=O\in\mathfrak{o}(2,\mathbb{C})$ より (り 2) も OK.
3. $X,Y\in\mathfrak{o}(m,\mathbb{C})$ とする.

   ${}^{\mathrm{t}}X=-X$, ${}^{\mathrm{t}}Y=-Y$. ${}^{\mathrm{t}}(X+Y)={}^{\mathrm{t}}X+{}^{\mathrm{t}}Y=-(X+Y)$, ${}^{\mathrm{t}}(aX)=a{}^{\mathrm{t}}X=-aX$ より (り 1) は成立.

   ${}^{\mathrm{t}}[X,Y]={}^{\mathrm{t}}(XY-YX)={}^{\mathrm{t}}Y{}^{\mathrm{t}}X-{}^{\mathrm{t}}X{}^{\mathrm{t}}Y=YX-XY=-[X,Y]$ より (り 2) も成立.

7 Lie代数の準同型

7.1 quiz:Lie代数の準同型

$\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ の基底として, $e_0=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}, e_1=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}, e_2=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$ がとれる. $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ から $\mathfrak{o}(3,\mathbb{C})$ への線形写像 f を $f(e_0)=\begin{pmatrix}0&-2i&0\\2i&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}, f(e_1)=\begin{pmatrix}0&0&-1\\0&0&-i\\1&i&0\end{pmatrix}, f(e_2)=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&-i\\-1&i&0\end{pmatrix}$ で定める.

関係 $f([e_i,e_j])=[f(e_i),f(e_j)]$ を示そう.

今日の範囲に対応する教科書のお奨め問題

佐藤 問 2.1,2.2(p.10,11)

hig@math.ryukoku.ac.jp, http://hig3.net(講義のページもここからたどれます), へや: 3 号館 5 階 502.