理論物理学特論 aka 線形代数・演習 III ファイナルトライアル

樋口さぶろお[1]　配布: 2010-07-29 Thu 更新: Time-stamp: "2010-07-28 Wed 20:44 JST hig"

ファイナルトライアル参加案内

1. 外部記憶ペーパー作成 10 分, 答案作成 80 分.
2. 過程も答えよう. 最終的な答えが正しいことがわかるような過程を記そう.
3. 問題文に現れない記号を使うときは, 定義を記そう.

1

行列 $M = \begin{pmatrix} 3 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 2 \end{pmatrix}$ について, M^n (n は整数) を求めよう.

2

$\boxed{\text{過程不要}}$
Lie 代数 $\mathfrak{g} = \{X | X$ は 3×3 実行列, ${}^{\mathrm{t}}X = -X\}$ の基底をひとつ求めよう.

3

$\boxed{15\text{ 点}}$
行列の集合 $\mathfrak{g} = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix} \right) \middle| a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$ が Lie 代数であることを示そう.

4

$\boxed{15\text{ 点}}$
$\mathfrak{g} = \{X | X$ は $n \times n$ 実行列, $\mathrm{tr}\ X = 0\}$ は Lie 代数である. 写像 $\phi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ を $\phi(X) = {}^{\mathrm{t}}X \times (-1)$ で定める. ϕ が Lie 代数の準同型写像であることを示そう.

5

Lie 代数 $\mathfrak{g} = \{ \left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ b & c \end{smallmatrix} \right) | a, b, c \in \mathbb{R}\}$ と, その元 $P = \left(\begin{smallmatrix} p & 0 \\ q & r \end{smallmatrix} \right) \in \mathfrak{g}$ に対して, 線形写像 $\mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ を $\phi(X) = [P, X]$ で定義する. $\mathfrak{g}$ の基底を

$$\langle \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix} \right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix} \right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix} \right) \rangle$$

としたとき, 線形写像 ϕ の表現行列を求めよう.

---

hig@math.ryukoku.ac.jp, http://hig3.net(講義のページもここからたどれます), へや:1 号館 5 階 502.

6

次の式をできるだけ簡単にしよう.

1. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\delta_{ij}\delta_{ij}$

2. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\delta_{ii}\delta_{jj}$

3. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}A_{ijk}B_{ik}\delta_{ij}\delta_{jk}$

4. $\displaystyle\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}A_{jk}B_{k}\delta_{ij}\delta_{jk}\delta_{jk}$ (ただし, $1 \leq i \leq n$ であり, i についての和はない)

7

Lie 代数 $\mathfrak{gl}(2) = \{ \left(\begin{smallmatrix} x & y \\ z & w \end{smallmatrix}\right) | \, x, y, z, w \in \mathbb{R}\}$ を考える. 線形写像 $\phi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ を,

$$\phi(X) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

とする. 線形写像 ϕ のトレースを求めよう.

8

Lie 代数 $\mathfrak{g} = \{ \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & -a \end{smallmatrix}\right) | \, a, b \in \mathbb{R}\}$ を考える. $X_i = \left(\begin{smallmatrix} x_i & y_i \\ 0 & -x_i \end{smallmatrix}\right) \in \mathfrak{g}$ ($i = 1, 2$) とするとき, $\mathfrak{g}$ の Killing 形式 $B(X_1, X_2)$ を x_i, y_i ($i = 1, 2$) で表そう.

理論物理学特論aka線形代数・演習IIIファイナルトライアル略解

樋口さぶろお[2] 配布: 2010-07-29 Thu 更新: Time-stamp: "2010-07-28 Wed 20:44 JST hig"

1

M の固有値と固有ベクトルは, $\lambda_1=1,\lambda_2=4$, $\boldsymbol{v}_1=\frac{1}{\sqrt{3}}\left(\begin{smallmatrix}1\\-\sqrt{2}\end{smallmatrix}\right),\boldsymbol{v}_2=\frac{1}{\sqrt{3}}\left(\begin{smallmatrix}\sqrt{2}\\1\end{smallmatrix}\right)$. これは基底となっているので,

$$M=P\begin{pmatrix}1&0\\0&2^2\end{pmatrix}P^{-1},\quad P=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1&\sqrt{2}\\-\sqrt{2}&1\end{pmatrix}$$

と対角化できる.

$$M^n=(PMP^{-1})^n=PM^nP^{-1}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1+2^{2n+\frac{1}{2}}&\sqrt{2}(-1+2^{2n})\\\sqrt{2}(-1+2^{2n})&2+2^{2n}\end{pmatrix}.$$

2

3 次元で, 基底のひとつの例は,

$$\left\langle\left(\begin{smallmatrix}0&+1&0\\-1&0&0\\0&0&0\end{smallmatrix}\right),\left(\begin{smallmatrix}0&0&+1\\0&0&0\\-1&0&0\end{smallmatrix}\right),\left(\begin{smallmatrix}0&0&0\\0&0&+1\\0&-1&0\end{smallmatrix}\right)\right\rangle.$$

3

略. (り 1),(り 2) を示せばよい.

4

(じ 1) は容易. (じ 2) は, $X,Y\in\mathfrak{g}$ とすると,

$$\begin{aligned}\phi([X,Y])&=-{}^{\mathrm{t}}[X,Y]=-{}^{\mathrm{t}}(XY-YX)=-{}^{\mathrm{t}}(XY)+{}^{\mathrm{t}}(YX)\\&=-{}^{\mathrm{t}}Y{}^{\mathrm{t}}X+{}^{\mathrm{t}}X{}^{\mathrm{t}}Y=[-{}^{\mathrm{t}}X,-{}^{\mathrm{t}}Y]=[\phi(X),\phi(Y)].\end{aligned}$$

hig@math.ryukoku.ac.jp, http://hig3.net(講義のページもここからたどれます), へや:1 号館 5 階 502.

5

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ q & r-p & -q \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

6

1. n.
2. n^2.
3. $\sum_{i=1}^{n} A_{iii} B_{ii}$.
4. $A_{ii} B_i$.

7

$\phi(X) = \left(\begin{smallmatrix} 2x+4z & 2y+4w \\ 6x+8z & 6y+8w \end{smallmatrix}\right)$. よって，$\mathfrak{g}$ の基底 $\langle \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \rangle$ をとって表示すると，

$$\phi = \begin{pmatrix} 2 & & 4 & \\ & 2 & & 4 \\ 6 & & 8 & \\ & 6 & & 8 \end{pmatrix}.$$

よって $\operatorname{tr} \phi = 20$.

8

$4x_1x_2$.