理論物理学特論 aka 線形代数・演習 III

樋口さぶろお[1] 配布: 2010-04-22 Thu 更新: Time-stamp: "2010-04-23 Fri 18:16 JST hig"

1 略解:行列の指数関数

1.1 略解:行列の指数関数

略解

1. $\begin{pmatrix} \cosh 2 & \sinh 2 \\ \sinh 2 & \cosh 2 \end{pmatrix}$.
2. E.
3. $E+X=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
4. $\begin{pmatrix} \mathrm{e}^1 & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{-2} \end{pmatrix}$.
5. X の固有値 $\lambda_\pm = \pm 2$, 固有ベクトル $v_{+2}=\begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}, v_{-2}=\begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix}$. よって X は $P=\begin{pmatrix} \sqrt{3} & 1 \\ 1 & -\sqrt{3} \end{pmatrix}$ により,

   $$X=PDP^{-1}, \quad D=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

   と対角化される. よって

   $$\mathrm{e}^X=P\mathrm{e}^D P^{-1}=P\begin{pmatrix} \mathrm{e}^2 & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{-2} \end{pmatrix}P^{-1}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3\mathrm{e}^2+\mathrm{e}^{-2} & \sqrt{3}(\mathrm{e}^2-\mathrm{e}^{-2}) \\ \sqrt{3}(\mathrm{e}^2-\mathrm{e}^{-2}) & \mathrm{e}^2+3\mathrm{e}^{-2} \end{pmatrix}.$$

2 Jordan の標準形と行列の指数関数

今日の目標

- $\exp \mathrm{tr} = \det \exp$.
- Jordan の標準形
- Jordan の標準形を利用した行列の指数関数の計算

hig@math.ryukoku.ac.jp, http://hig3.net(講義のページもここからたどれます), へや:1 号館 5 階 502.

2.1 quiz:Jordan の標準形他

1. 任意の実数 t に対して　e^{tX} の行列式が 1 であるための X の条件を求めよう.
2. 任意の実数 t に対して　e^{tX} が正則行列であるための X の条件を求めよう.
3. $X = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -9 & -6 \end{smallmatrix}\right)$ の Jordan の標準形を求めよう. 基底変換行列 P を求めよう.
4. 上の問の X について e^{tX} を求めよう. t は実数.

今日の範囲に対応する教科書のお奨め問題

松本 §6.7

http://hig3.net/

目次 前回 次回 略解