理論物理学特論aka線形代数・演習III

樋口さぶろお[1] 配布: 2010-05-13 Thu 更新: Time-stamp: "2010-05-20 Thu 12:36 JST hig"

4 略解:ベクトル, 行列値関数に対する線形微分方程式の解

4.1 略解:行列値関数に対する線形微分方程式の解

略解 $Y(t) = -2\mathrm{e}^{t\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3\mathrm{e}^{2t}+\mathrm{e}^{-2t} & \sqrt{3}(\mathrm{e}^{+2t}-\mathrm{e}^{2t}) \\ \sqrt{3}(\mathrm{e}^{+2t}-\mathrm{e}^{-2t}) & \mathrm{e}^{2t}+3\mathrm{e}^{-2t} \end{pmatrix}$

4.2 略解:ベクトル値関数に対する線形微分方程式の解

略解

1.
$$\boldsymbol{Y}'(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4 & -4 \end{pmatrix} \boldsymbol{Y}(t), \quad \boldsymbol{Y}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

2.
$$\begin{pmatrix} y(t) \\ v(t) \end{pmatrix} = \mathrm{e}^{t\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4 & -4 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-2t}+5t\mathrm{e}^{-2t} \\ 3\mathrm{e}^{-2t}-10t\mathrm{e}^{-2t} \end{pmatrix}$$

5 群

今日の目標

- 群の定義を知ろう
- 群のイメージを作ろう

5.1 quiz:行列の群

0 $G = \left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$ は行列の乗法を演算として群であることを示そう.

1. 実 $N \times N$ 行列全体の集合は行列の乗法を演算として群ではないことを示そう.

2. M が実 $N \times N$ 行列のとき $\{M | \det M \neq 0\}$ は行列の乗法を演算として群であることを示そう.

hig@math.ryukoku.ac.jp, http://hig3.net(講義のページもここからたどれます), へや:1 号館 5 階 502.

3. M が実 $N\times N$ 行列のとき $\{M|\ |\det M|=1\}$ は行列の乗法を演算として群であることを示そう.
4. M が実 $N\times N$ 行列のとき $\{M|\det M>0\}$ は行列の乗法を演算として群であることを示そう.
5. M が実 $N\times N$ 行列のとき $\{M|\det M<0\}$ は行列の乗法を演算として群でないことを示そう.
6. 直交行列全体は行列の乗法を演算として群であることを示そう.
7. Unitary 行列全体は行列の乗法を演算として群であることを示そう.
8. 対称行列全体は行列の乗法を演算として群ではないことを示そう.
9.
10. $G=\{\left(\begin{smallmatrix}\cos t & -\sin t\\ \sin t & \cos t\end{smallmatrix}\right)|t\in\mathbb{R}\}$ は行列の乗法を演算として群であることを示そう.
11. Hermite 行列全体は行列の乗法を演算として群ではないことを示そう.
12. $G=\left\{\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right),\left(\begin{smallmatrix}-1&0\\0&-1\end{smallmatrix}\right),\left(\begin{smallmatrix}0&1\\1&0\end{smallmatrix}\right),\left(\begin{smallmatrix}0&-1\\-1&0\end{smallmatrix}\right)\right\}$ は行列の乗法を演算として群であることを示そう.
13. $G=\left\{\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right),\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}&-\frac{\sqrt{3}}{2}\\+\frac{\sqrt{3}}{2}&-\frac{1}{2}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}&+\frac{\sqrt{3}}{2}\\-\frac{\sqrt{3}}{2}&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}\right\}$ は行列の乗法を演算として群であることを示そう.
14. $\{\lambda E|\lambda\neq 0\}$ は行列の乗法を演算として群であることを示そう.
15. $\{\lambda E|\lambda>0\}$ は行列の乗法を演算として群であることを示そう.
16. $\{\lambda E|\ |\lambda|>1\}$ は行列の乗法を演算として群ではないことを示そう.
17. $\{\lambda E|\lambda<0\}$ は行列の乗法を演算として群ではないことを示そう.
18. $N\times N$ 実行列 M に対して $\{M|\mathrm{tr}M=0\}$ は行列の乗法を演算として群ではないことを示そう.
19. $N\times N$ 行列 M に対して $\{\mathrm{e}^{tM}|t\in\mathbb{R}\}$ は行列の乗法を演算として群であることを示そう.