理論物理学特論 aka 線形代数・演習 III

樋口さぶろお[1] 配布: 2010-06-24 Thu 更新: Time-stamp: "2010-06-24 Thu 07:17 JST hig"

9 略解:準同型写像の表現行列

9.1 略解:行列の線形空間

略解 $\begin{pmatrix} a & & b & \\ & a & & b \\ c & & d & \\ & c & & d \end{pmatrix}$. ちなみに線形写像 $g_M(X)=XM$ の同じ基底のもとでの表現行列は $\begin{pmatrix} a & c & & \\ b & d & & \\ & & a & c \\ & & b & d \end{pmatrix}$.

9.2 略解:Lie 代数の同型

略解 $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ の基底

$$e_1=\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right), e_2=\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right), e_3=\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right).$$

交換子

$$[e_1,e_2]=2e_2,\quad [e_2,e_3]=e_1,\quad [e_1,e_3]=-2e_3$$

$\mathfrak{o}(3,\mathbb{C})$ の基底

$$f_1=\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix}\right), f_2=\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{smallmatrix}\right), f_3=\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{smallmatrix}\right).$$

交換子

$$[f_1,f_2]=-f_3,\quad [f_2,f_3]=-f_1,\quad [f_3,f_1]=-f_2.$$

写像 ϕ

$$\phi\left(\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & -a \end{smallmatrix}\right)\right)=\begin{pmatrix} 0 & -2ia & -(b-c) \\ 2ia & 0 & -i(b+c) \\ -(c-b) & i(b+c) & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\phi(e_1)=-2if_1,\quad \phi(e_2)=-f_2-if_3,\quad \phi(e_3)=+f_2-if_3.$$

ϕ の (じ 2)

$$\begin{aligned} [\phi(e_1),\phi(e_2)]=&[-2if_1,-f_2-if_3]=+2i[f_1,f_2]-2[f_1,f_3]=-2if_3-2f_2. \\ \phi([e_1,e_2])=&\phi(2e_2)=2\phi(e_2)=2(-f_2-if_3). \end{aligned}$$

[1]
hig@math.ryukoku.ac.jp, http://hig3.net(講義のページもここからたどれます), へや:1 号館 5 階 502.

10　写像 Ad と ad

今日の目標

- 同型
- 写像 Ad
- 随伴表現 ad

10.1　quiz:随伴表現

$\mathrm{Ad}(T)([X,Y]) = [\mathrm{Ad}(T)(X), \mathrm{Ad}(T)(Y)]$ を示そう. 佐藤 問 2.2(p.11)

10.2　quiz:随伴表現

$\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ の基底を, $\langle E_{11} - E_{22}, E_{12}, E_{21} \rangle$ とする. $X = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & -a \end{smallmatrix}\right) \in \mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ に対して, この基底での $\mathrm{ad}(X)$ の表現行列を求めよう. 佐藤 問 3.5(p.16)

今日の範囲に対応する教科書のお奨め問題

佐藤 問 2.2(p.11), 問 3.1,3.2(p.15), 問 3.3-3.5(p.16), 問 3.6-3.8(p.17)

目次 前回 次回 略解