理論物理学特論プチテスト

樋口さぶろお[1] 配布: 2011-11-15 Tue 更新: Time-stamp: "2011-11-25 Fri 07:46 JST hig"

プチテスト参加案内

1. 外部記憶ペーパー作成 10 分, 答案作成 80 分
2. 指定された用紙に解答しよう.
3. 過程も答えよう. 最終的な答えが正しいことがわかるような過程を記そう.
4. 問題文に現れない記号を使うときは, 定義を記そう.

1

行列の指数関数の値

$$\mathrm{e}^{t\left(\begin{smallmatrix}0&1\\1&0\end{smallmatrix}\right)} \quad (t \in \mathbb{R})$$

の値を求めよう (和の記号 $\sum$ や, $\cdots$ を使わずに閉じた形で答えよう).

2

微分方程式

$$x' = 2x - x^2$$

を考える.

1. リッカチの微分方程式の定義を述べ, この微分方程式はリッカチの微分方程式とみなせるかどうか答えよう.
2. この微分方程式の定数解をすべて求めよう.
3. この微分方程式の一般解を求めよう (数学的に正しければ方法は問わない).

3

$A(t)$ を, 実数 $t \in \mathbb{R}$ に対して定義された, 行列に値をとる関数とする. 導関数 $(((A(t))^2)^{-1})'$ を, A, A' の積と和で表そう.

hig@math.ryukoku.ac.jp, http://hig3.net(講義のページもここからたどれます), へや:1 号館 5 階 502

4

実軸上の 4 点 $x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 3, x_4 = 10$ を考える.

正則行列 $A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ による 1 次分数変換を T_A とするとき, 複比 $q(T_A(x_1), T_A(x_2), T_A(x_3), T_A(x_4))$ を求めよう.

5

1 次分数変換が $T_A(1) = 3, T_A(2) = 0, T_A(3) = +\infty$ となるような $A \in \mathrm{GL}_2\mathbb{R}$ をひとつ求めよう.

6

射影直線の点を同次座標 $[x_1 : x_2]$ で表す.

射影変換が $T_A([3:3]) = [2:4], T_A([1:2]) = [1:0], T_A([1:4]) = [0:1]$ となるような $A \in \mathrm{GL}_2\mathbb{R}$ をひとつ求めよう.

7

微分方程式系

$$\begin{aligned} x_1'(t) =& 5x_1(t) - 4x_2(t), \\ x_2'(t) =& -4x_1(t) + x_2(t) \end{aligned}$$

の, 初期条件 $x_1(0) = -2, x_2(0) = 3$ のもとでの解を, 行列の指数関数とベクトルの積の形に書き表そう (指数関数を計算して簡単化しなくてよい).

8

2×2 行列の集合 $G = \{M \mid \det M = 1 \text{ または } \det M = -1\}$ が, 行列の積を演算として群になっていることを証明しよう.

9

2×2 行列の集合 $G = \{\mathrm{e}^{t\left(\begin{smallmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)} \mid t \in \mathbb{R}\}$ は, 行列の積を演算として群である.

G は, 行列と縦ベクトルの積により, $\mathbb{R}$ に作用している.

点 $\left(\begin{smallmatrix} -1 \\ -2 \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^2$ の G-軌道を x_1x_2 平面上に描こう.

10

2×2 行列の集合 $G = \{\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & x \end{smallmatrix}\right) \mid x \in \mathbb{R}\}$ が, 行列の積を演算として群になっていないことを示そう.

理論物理学特論プチテスト略解

樋口さぶろお[2]　配布: 2011-11-15 Tue 更新: Time-stamp: "2011-11-25 Fri 07:46 JST hig"

1

$\begin{pmatrix} \cosh t & \sinh t \\ \sinh t & \cosh t \end{pmatrix}$

2

1. リッカチの微分方程式は $x'(t) = \alpha(t)x(t)^2 + 2\beta(t)x(t) + \gamma(t)$. なので, $\alpha(t) = -1, \beta(t) = 1, \gamma(t) = 0$.
2. 定数解なので $x' = x(2-x) = 0$. よって $x(t) = 0, 2$.
3. 特解 $x(t) = 0$ を利用して, $x(t) = 0 + \frac{1}{v(t)}$ とおくと, $v' = -2v + 1$. よって $v(t) = Ce^{-2t} - \frac{1}{2}$. $x(t) = \frac{2}{1+Ce^{-2t}}$. 部分分数展開でも解ける.

3

$(((A(t))^2)^{-1})' = -A^{-2}A'A^{-1} - A^{-1}A'A^{-2}$.

4

複比は 1 次分数変換で不変. $q = -\frac{7}{20}$.

5

$A = \begin{pmatrix} -6 & 12 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$

6

$A = \begin{pmatrix} -6 & 12 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$

7

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = e^{t\begin{pmatrix} +5 & -4 \\ -4 & +1 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

hig@math.ryukoku.ac.jp, http://hig3.net(講義のページもここからたどれます), へや:1 号館 5 階 502.

8

- $A, B \in G$ とすると, $|\det A| = |\det B| = 1$. よって, $|\det(AB)| = |\det A||\det B| = 1$. $AB \in G$.
- $\det E = 1$ より $E \in G$.
- $A \in G$ とすると, $\det A = \pm 1$ なので逆行列 A^{-1} が存在する. $1 = \det E = \det(AA^{-1}) = \det A \det A^{-1} = \pm \det A^{-1}$ より, $A^{-1} \in G$.

9

$G = \{\left(\begin{smallmatrix} \mathrm{e}^{-2t} & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{t} \end{smallmatrix}\right) | t \in \mathbb{R}\}$. よって, 点 $\left(\begin{smallmatrix} -1 \\ -2 \end{smallmatrix}\right)$ の G-軌道は, $\begin{pmatrix} -\mathrm{e}^{-2t} \\ -2\mathrm{e}^{t} \end{pmatrix}$. これは, 曲線 $x_1 = -4/x_2^2$ の $x_2 < 0$ 部分, したがって, 第 III 象限に含まれる部分.

10

$A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) \in G$ だが, 逆行列 A^{-1} は存在しないので, G は群ではない.

http://hig3.net