理論物理学特論ファイナルトライアル

樋口さぶろお[1]　配布: 2012-01-31 Tue 更新: Time-stamp: "2012-02-04 Sat 17:16 JST hig"

ファイナルトライアル参加案内

1. 外部記憶ペーパー作成 10 分, 答案作成 80 分
2. 指定された用紙に解答しよう.
3. 過程も答えよう. 最終的な答えが正しいことがわかるような過程を記そう.
4. 問題文に現れない記号を使うときは, 定義を記そう.

1

ベクトル場

$$X(x_1, x_2) = ((x_1 - 1) \cdot x_2, 2x_2^2)$$

の積分曲線 $\boldsymbol{x}(t)$ を求めよう.

2

ベクトル場 $X(x_1, x_2) = (x_1 x_2 + x_1^3, -3x_1 + x_2)$, スカラー場 $f(x_1, x_2) = 2x_1 x_2^2 + 3x_1^2$ を考える.

1. $\mathrm{div}\ X$ を求めよう
2. $\mathrm{curl}\ X$ を求めよう
3. $\mathrm{grad}\ f$ を求めよう.

3

$A, B, C \in \mathbb{R}$ を定数とするとき, 関数 $\phi(x_1, x_2) = Ax_1^2 + 2Bx_1 x_2 + Cx_2^2$ が調和関数であるための必要十分条件を求めよう.

4

ベクトル場 $X = (\mathrm{e}^{x_1} \cos x_2, -\mathrm{e}^{x_1} \sin x_2)$ を考える.

1. $\mathrm{div} X$ を求めよう.
2. $\mathrm{curl} X$ を求めよう.

---

hig@math.ryukoku.ac.jp, http://hig3.net(講義のページもここからたどれます), へや:1 号館 5 階 502

3. $X = \mathrm{grad}\,\phi$ となるスカラー場 ϕ を求めよう.
4. $X = -J\mathrm{grad}\,\psi$ となるスカラー場 ψ を求めよう. ただし, J は 2×2 行列 $\left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$.

5

次の微分方程式が完全型であるかどうか判定し, 理由をつけて答えよう.
積分因子をかけて同値変形することは考えず, この形のままで考える.

1. $x_2^2 + 2x_1x_2\frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}x_1} = 0$
2. $x_2 + 2x_1\frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}x_1} = 0$

6

次の完全型微分方程式の解を求めよう.

$$6x_1x_2 + \mathrm{e}^{x_1} + (3x_1^2 + \sin x_2)\frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}x_1} = 0$$

7

次の微分方程式を考える.

$$x_2^2 + 4x_2\mathrm{e}^{x_1} + (2x_2 + 2\mathrm{e}^{x_1})\frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}x_1} = 0$$

1. $X = (x_2^2 + 4x_2\mathrm{e}^{x_1}, 2x_2 + 2\mathrm{e}^{x_1})$ とするとき, $\frac{\mathrm{curl}X}{X_2}$ を求めよう.
2. 積分因子をひとつ求めよう.
3. 微分方程式の解を求めよう.

8

微分方程式

$$(x_1 + x_2) + x_1\frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}x_1} = 0$$

は, ベクトル場 $V = (x_1, x_2)$ の定める 1 径数変換群のもとで不変である.

1. リーの定理から積分因子を求めよう.
2. 微分方程式の解を求めよう.

9

微分方程式

$$4x_1^3 x_2 + (x_1^4 + x_2^2)\frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}x_1} = 0$$

を不変にする 1 径数変換群と, 対応するベクトル場 V を見つけよう.

10

Lie 代数

$$\mathfrak{g} = \{ \left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & -a \end{smallmatrix}\right) | \, a \in \mathbb{R} \}$$

に対応する Lie 群をひとつ求めよう.

理論物理学特論ファイナルトライアル略解

樋口さぶろお[2] 配布: 2012-01-31 Tue 更新: Time-stamp: "2012-02-04 Sat 17:16 JST hig"

配点 各問 10 点計 100 点.

1

$$
\begin{aligned}
x_1'(t) =&(x_1(t)-1)\cdot x_2(t)\\
x_2'(t) =&2x_2(t)^2
\end{aligned}
$$

を解くと積分曲線 $\boldsymbol{x}(t)=(x_1(t),x_2(t))$ が求められる.

(2) より

$$x_2(t)=-\frac{1}{2}\frac{1}{t+C} \quad (C \text{ は任意定数}).$$

(1) にこれを代入して,

$$\frac{1}{x_1-1}\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t}=-\frac{1}{2}\frac{1}{t+C}$$

よって $x_1(t)=1+D(t+C)^{-1/2}$. すなわち,

$$\boldsymbol{x}(t)=(-\tfrac{1}{2}(t+C)^{-1},1+D(x+C)^{-1/2}) \qquad (C,D \text{ は任意定数})$$

配点 定義 2 点, x_1, x_2 各 4 点.

2

1. $\mathrm{div}\, X=x_2+3x_1^2+1$.
2. $\mathrm{curl}\, X=-3-x_1$.
3. $\mathrm{grad}\, f=(2x_2^2+6x_1,4x_1x_2)$.

配点 1,2:各 3 点、3:4 点.

3

$\triangle\phi=A+C$ なので条件は $A=-C$.

hig@math.ryukoku.ac.jp, http://hig3.net(講義のページもここからたどれます), へや:1 号館 5 階 502.

配点　10 点.

4

1. $\mathrm{div} X = 0$.
2. $\mathrm{curl} X = 0$.
3. $\phi(x_1, x_2) = \mathrm{e}^{x_1} \cos x_2$.
4. $\psi(x_1, x_2) = +\mathrm{e}^{x_1} \sin x_2$.

配点　1,2:各 1 点,3,4:各 4 点.

5

1. $\mathrm{curl} X = 0$ なので完全型.
2. $\mathrm{curl} X = 2 - 1 \neq 0$ なので完全型でない.

配点　1,2:各 5 点.

6

$3x_1^2 x_2 + \mathrm{e}^{x_1} - \cos x_2 = C$ (C は任意定数)

配点　10 点.

7

1. $\mathrm{curl}\ X/X_2 = -1$.
2. $\mu = -\mathrm{e}^{\int (-1)\ \mathrm{d}x_1} = \mathrm{e}^{x_1}$.
3. $x_2^2 + 2x_2 \mathrm{e}^{x_1} = C$.

配点　1:1 点,2:4 点,3:5 点.

8

1. $\mu = (x_1^2 + 2x_1 x_2)^{-1}$.
2. $x_1 + 2x_1 x_2 = C$.

配点　1:4 点,2:6 点.

9

$\tilde{x}_1 = \mathrm{e}^s x_1, \tilde{x}_2 = \mathrm{e}^{2s} x_2$ のもとで不変. よって, $V = (x_1, 2x_2)$.

配点　10 点.

10

$$G = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x & 0 \\ 0 & \frac{1}{x} \end{smallmatrix} \right) \middle| x > 0 \right\}.$$

$x \neq 0$ としたもの (これは $\mathrm{GL}_1\mathbb{R}$ と同型) も答.

配点　10 点.

http://hig3.net