理論物理学特論

樋口さぶろお[1] 配布: 2011-09-27 Tue 更新: Time-stamp: "2011-09-28 Wed 09:13 JST hig"

1 略解:微分方程式と不変量

1.1 略解:リッカチ型微分方程式

特解 $x(t)=\frac{1}{2}t$ があるので, $x(t)=\frac{1}{2}t+\frac{1}{v(t)}$ とおく. $v(t)$ は 1 階線形非斉次微分方程式

$$v'(t)-(2t-\tfrac{1}{t})v(t)=2$$

を満たす. これは特解 $v(t)=-\frac{1}{t}$ を持つ. 対応する斉次方程式

$$v'(t)=(2t-\tfrac{1}{t})v(t)$$

は変数分離形なので解けて,

$$v(t)=\tfrac{C}{t}\mathrm{e}^{t^2}\quad (C:\text{任意定数}).$$

よって, 1 階線形非斉次微分方程式の一般解は

$$v(t)=\tfrac{1}{t}(-1+C\mathrm{e}^{t^2}).$$

問題のリッカチ型微分方程式の一般解は

$$x(t)=\frac{1}{2}t+\frac{t}{-1+C\mathrm{e}^{t^2}}.$$

1.2 略解:リッカチ型微分方程式

特解として $x(t)=3$ がある.
$x(t)=3+\frac{1}{v(t)}$ とおくと, $v(t)$ の満たす微分方程式は

$$-v'=v+1$$

これを解くと, $v(t)=-1+C\mathrm{e}^{-t}$. C は任意定数.
よってもとの方程式の一般解は (整理の仕方はいろいろあるが)

$$x(t)=3+\frac{1}{-1+C\mathrm{e}^{-t}}=\frac{-2+3C\mathrm{e}^{-t}}{-1+C\mathrm{e}^{-t}}.=\frac{2C\mathrm{e}^{t}-3}{C\mathrm{e}^{t}-1}.$$

特解 $x(t)=2$ を用いても同じ一般解を得る.
また, 部分分数展開を用いても同じ一般解を得る.

hig@math.ryukoku.ac.jp, http://hig3.net(講義のページもここからたどれます), へや:1 号館 5 階 502.

2　複比 (非調和比) と 1 次分数変換

今日の目標

- 複比の定義を説明できるようになろう
- 1 次分数変換の定義を説明できるようになろう
- 複比が 1 次分数変換で不変であることを腕力で証明できるようになろう

2.1　quiz:リッカチ型微分方程式の不変量

複比 $\frac{(x_1-x_2)(x_3-x_4)}{(x_2-x_3)(x_4-x_1)}$ がリッカチ型微分方程式の不変量であることを示そう.

2.2　quiz:1 次分数変換

$A \in \mathrm{GL}_2\mathbb{R}$ に対応する 1 次分数変換が $T_A(x)$ を考えたとき, $T_{AB} = T_A \circ T_B$, すなわち任意の $\forall x \in \mathbb{R} \quad T_{AB}(x) = T_A(T_B(x))$ を示そう.

目次 前回 次回 略解