理論物理学特論

樋口さぶろお[1]　配布: 2011-11-01 Tue 更新: Time-stamp: "2011-11-01 Tue 18:53 JST hig"

5 略解:行列の微分

5.1 略解:

1. $\begin{pmatrix} +\cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}$.
2. $(X^2)' = X'X+XX'$,$(X^3)' = X'XX+XX'X+XXX'$,$(X^n)' = \sum_{i=1}^n X\cdots \underbrace{X'}_{i}\cdots X$.
3. $(X^{-1})' = -X^{-1}X'X^{-1}$.
4. $X = tM$, $M = \begin{pmatrix} 0 & +1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ とする. $X'X - XX' = MtM - tMM = O$. よって, $\left(\mathrm{e}^{tM}\right)' = M\mathrm{e}^{tM} = \begin{pmatrix} -\sin t & +\cos t \\ -\cos t & -\sin t \end{pmatrix}$.
   $\mathrm{e}^{tM} = \begin{pmatrix} +\cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}$ を直接微分しても同様の結果を得る.

6 群とその作用

今日の目標

- 微分方程式系を, 行列の指数関数を利用して解こう.

6.1 quiz:

1. 2 次元ベクトル値関数 $\boldsymbol{x}(t)$ に対する常微分方程式

$$\boldsymbol{x}'(t) = \begin{pmatrix} 0 & +1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{x}(t), \quad \boldsymbol{x}(0) = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

   の解を求めよう.
2. 微分方程式 $x'' - 3x' + 2x = 0$ の一般解を, $x_1 = x, x_2 = x'$ とおいて 1 階の微分方程式に直して, 行列の指数関数を利用して求めよう.

6.2 quiz:行列の群

1. $G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ は行列の乗法を演算として群であることを示そう.
2. 実 2×2 行列全体の集合は行列の乗法を演算として群ではないことを示そう.

hig@math.ryukoku.ac.jp, http://hig3.net(講義のページもここからたどれます), へや:1 号館 5 階 502.

3. M が実 2×2 行列のとき $\{M|\det M\neq 0\}$ は行列の乗法を演算として群であることを示そう.
4. M が実 2×2 行列のとき $\{M|\,|\det M|=1\}$ は行列の乗法を演算として群であることを示そう.
5. M が実 2×2 行列のとき $\{M|\det M>0\}$ は行列の乗法を演算として群であることを示そう.
6. M が実 2×2 行列のとき $\{M|\det M<0\}$ は行列の乗法を演算として群でないことを示そう.
7. 対称行列全体は行列の乗法を演算として群ではないことを示そう.
8. $G=\{\left(\begin{smallmatrix}\cos t & -\sin t\\ \sin t & \cos t\end{smallmatrix}\right)|\,t\in\mathbb{R}\}$ は行列の乗法を演算として群であることを示そう.
9. $G=\left\{\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right),\left(\begin{smallmatrix}-1&0\\0&-1\end{smallmatrix}\right),\left(\begin{smallmatrix}0&1\\1&0\end{smallmatrix}\right),\left(\begin{smallmatrix}0&-1\\-1&0\end{smallmatrix}\right)\right\}$ は行列の乗法を演算として群であることを示そう.
10. $G=\left\{\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right),\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}&-\frac{\sqrt{3}}{2}\\+\frac{\sqrt{3}}{2}&-\frac{1}{2}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}&+\frac{\sqrt{3}}{2}\\-\frac{\sqrt{3}}{2}&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}\right\}$ は行列の乗法を演算として群であることを示そう.
11. $\{\lambda E|\lambda\neq 0\}$ は行列の乗法を演算として群であることを示そう.
12. $\{\lambda E|\lambda>0\}$ は行列の乗法を演算として群であることを示そう.
13. $\{\lambda E|\,|\lambda|>1\}$ は行列の乗法を演算として群ではないことを示そう.
14. $\{\lambda E|\lambda<0\}$ は行列の乗法を演算として群ではないことを示そう.
15. 2×2 実行列 M に対して $\{M|\mathrm{tr}M=0\}$ は行列の乗法を演算として群ではないことを示そう.
16. 2×2 行列 M に対して $\{\mathrm{e}^{tM}|t\in\mathbb{Z}\}$ は行列の乗法を演算として群であることを示そう.
17. $G=\{E,2E\}$ は行列の乗法を演算として群ではないことを示そう.

6.3 quiz:群の作用と軌道

次の行列の群 G は, 行列 A と縦ベクトル $\boldsymbol{V}$ の積 $A\boldsymbol{v}$ によって $\mathbb{R}^2$ に作用している. 点 $\boldsymbol{v}$ の G-軌道を求めよう.

1. $G=\left\{\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right),\left(\begin{smallmatrix}-1&0\\0&-1\end{smallmatrix}\right),\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&-1\end{smallmatrix}\right),\left(\begin{smallmatrix}-1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)\right\}$, $\boldsymbol{v}_0=(2,3)^{\mathrm{t}}$.
2. $G=\{\mathrm{e}^{t\left(\begin{smallmatrix}0&1\\-1&0\end{smallmatrix}\right)}|t\in\mathbb{R}\}$, $\boldsymbol{v}_0=(1,0)^{\mathrm{t}}$.
3. $G=\{\mathrm{e}^{\frac{2\pi}{3}t\left(\begin{smallmatrix}0&1\\-1&0\end{smallmatrix}\right)}|t\in\mathbb{Z}\}$, $\boldsymbol{v}_0=(1,\sqrt{3})^{\mathrm{t}}$.
4. $G=\{\mathrm{e}^{t\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&2\end{smallmatrix}\right)}|t\in\mathbb{Z}\}$, $\boldsymbol{v}_0=(1,3)^{\mathrm{t}}$.

プチテストやります!

日時 2011-11-15 火 5, 90 分.
場所 いつもと同じ
配点 100 点が 30 ピーナッツ.
参照 外部記憶ペーパー作成 10 分, 答案作成 10 分.

公欠 基準と届が独自です. Web ページの病欠・公務欠席等の届出とそれを考慮する (しない) 方法参照.

出題計画

- 行列の指数関数を計算しよう (L05)
- リッカチの微分方程式を解こう (L02)
- 行列値関数を微分しよう (L05)
- 複比を計算しよう (L03)
- 実軸上の一次分数変換の計算をしよう (L04)
- 射影直線の射影変換の計算をしよう (L04)
- 微分方程式系の解を, 行列の指数関数を利用して書こう (L06)
- 群であるかどうか判定しよう (L06)
- 群の作用の軌道を描こう (L06)
- ?(L07)

出題計画は 2011-11-08 火に修正・詳細化されます.

目次 前回 次回 略解