理論物理学特論

樋口さぶろお[1] 配布: 2012-01-10 Tue 更新: Time-stamp: "2012-01-10 Tue 20:05 JST hig"

11　略解:完全型微分方程式と積分因子

11.1　略解:完全型微分方程式

1. $\mathrm{curl} X = 0$.
2. $x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2 = C$. ($C$ は任意定数)

11.2　略解:積分因子

1. $\mathrm{curl} X / X_2 = -1/x_1$. 積分因子は

$$\mu(x_1) = \mathrm{e}^{-\int -\frac{1}{x_1}\,\mathrm{d}x + C'} = C x_1.$$

ここで $F(x_1, x_2) = C(\frac{1}{3}{}_1^3 + \frac{1}{4}x_1^4 + \frac{1}{2}x_1^2 x_2^2)$ とおくと, $\mu X = \mathrm{grad} F$ となる. よって解は, $4x_1^3 + 3x_1^4 + 6x_1^2 x_2^2 = C$.

2. $\mathrm{curl} X / X_1 = 2/x_2$. 積分因子は

$$\mu(x_2) = \mathrm{e}^{-\int 2\frac{1}{x_2}\,\mathrm{d}x_2 + C'} = C x_2^{-2}.$$

ここで $F(x_1, x_2) = C(\frac{1}{2}x_1^2 - x_1 x_2 - \frac{1}{x_2})$ とおくと, $\mu X = \mathrm{grad} F$ となる. よって解は, $x_1^2 - 2x_1 x_2 - \frac{2}{x_2} = C$

12　解を解に写す 1 径数変換群と積分因子

今日の目標

- 微分方程式を不変にする 1 径数変換群を表現できるようになろう
- 微分方程式を不変にする 1 径数変換群から積分因子が求められるようになろう

---

hig@math.ryukoku.ac.jp, http://hig3.net(講義のページもここからたどれます), へや:1 号館 5 階 502.

12.1 quiz:積分因子

微分方程式

$$(x_1 - x_2) + x_1 \frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}x_1} = 0$$

を考える

1. curl$X$ を求めよう.
2. この微分方程式はベクトル場 $V = (x_1, x_2)$ の定める 1 径数変換群のもとで不変である. このことを利用して積分因子を求めよう.
3. 上で求めた積分因子を利用して, 微分方程式の解を求めよう.
4. 同次型微分方程式であることを利用して, 微分方程式の解を求めよう.

目次 前回 次回 略解