理論物理学特論

樋口さぶろお[1] 配布: 2012-01-24 Tue 更新: Time-stamp: "2012-01-23 Mon 13:51 JST hig"

13 略解:リー代数とリー型微分方程式

13.1 略解:積分因子

1. curl$X = -x_2 \neq 0$
2. $\tilde{x}_1 = \lambda^2 x_1, \tilde{x}_2 = \lambda x_2$.
3. $V = (2x_1, x_2)$.
4. $\mu = (X|V)^{-1} = (3x_1x_2^2 - 2ax_1^2)^{-1}$.
5. $\mu X = (\frac{x_1^2 - ax_1}{3x_1x_2^2 - 2ax_1^2}, \frac{x_1x_2}{3x_1x_2^2 - 2ax_1^2})$.
   ポテンシャル F は, $F_{x_2}(x_1, x_2) = \frac{x_1x_2}{3x_1x_2^2 - 2ax_1^2} = \frac{x_2}{3x_2^2 - 2ax_1}$ を解いて, $F(x_1, x_2) = \log|3x_2^2 - 2ax_1| + g(x_1)$.
   $F_{x_1}(x_1, x_2) = \frac{x_1^2 - ax_1}{3x_1x_2^2 - 2ax_1^2}$ より, $g'(x_1) = \frac{1}{3x_1}$. よって, 解は
   $$\log|3x_2^2 - 2ax_1| + 2\log|x_1| = C.$$
   C は任意定数.

14 リー型微分方程式としてのリッカチ方程式

今日の目標

- リー代数の定義が説明でき, 簡単な場合にリー代数とリー群の対応が発見できるようになろう
- リー型微分方程式の定義が説明できるようになろう

14.1 quiz:リー群とリー代数

次のリー代数に対応するリー群をひとつ挙げよう.

1. $\mathfrak{g} = \{ \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) t |\, t \in \mathbb{R}\}$.
2. $\mathfrak{g} = \{ \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) t |\, t \in \mathbb{R}\}$.
3. $\mathfrak{g} = \{ M |\, M \in \mathrm{M}_2\mathbb{R}, \mathrm{tr}M = 0\}$.

hig@math.ryukoku.ac.jp, http://hig3.net(講義のページもここからたどれます), へや:1 号館 5 階 502.

お知らせ

ファイナルトライアル計画

50 ピーナッツ. 外部記憶ペーパー使用可.
出題計画.

- ベクトル場の積分曲線を求める (L08)
- ベクトル場の div, curl, スカラー場の grad の計算 (L09).
- 調和関数の判定 (L10)
- $\mathrm{div} = \mathrm{curl} = 0$ なベクトル場 X のポテンシャル ϕ, ψ を求める (L10)
- curl の計算による完全型かどうかの判定 (L10)
- 完全型微分方程式の解を求める (L11)
- 簡単な場合に積分因子を発見して, 完全型微分方程式にして解を求める (L11)
- リーの定理から積分因子を発見して, 完全型微分方程式にして解を求める (L12)
- 微分方程式を不変にする 1 径数変換群を見つけ, 対応するベクトル場と積分因子を作る (L13)
- リー群とリー代数の関係 (L14)

目次 前回 次回 略解