

## 理論物理学特論ファイナルトリアル

樋口さぶろお\*<sup>1</sup> 配布: 2012-08-03 Fri 更新: Time-stamp: "2012-08-07 Tue 09:30 JST hig"

### ファイナルトリアル参加案内

1. 指定された用紙に解答しよう.
2. 過程も答えよう. 最終的な答えが正しいことがわかるような過程を記そう.
3. 問題文に現れない記号を使うときは, 定義を記そう.
4. 電卓使用可. 数学の試験なら有理数で答えるべきところを, (3桁程度の) 小数で答えてもかまわない.

### 1

次の2変数データ  $(x, y)$  を考える.

$x$	4	5	4	5	7
$y$	10	10	12	9	9

1.  $x, y$  の標本平均をそれぞれ求めよう.
2. 標本分散  $V_{xx}, V_{yy}$ , 標本共分散  $C(x, y)$  を求めよう.
3. (標本) 相関係数を求めよう.

### 2

標準化された (平均 0, 分散 1 の) 3 変数データ  $(x, y, z)$  について, 共分散行列が次のように与えられる.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1/2 & 0 \\ -1/2 & 1 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}$$

1. 第 1, 第 2 主成分を求めよう.
2. データ  $(0.5, 0.3, -0.2)$  の第 2 主成分の主成分得点を求めよう.
3. 各主成分の寄与率と累積寄与率を求めよう.

---

\*<sup>1</sup> Copyright ©2012Saburo HIGUCHI. All rights reserved.

hig@math.ryukoku.ac.jp, <http://hig3.net>(講義のページもここからたどれます), へや:1号館 5階 502

### 3

2変量データ  $A(0,0), B(1,0), C(3,2), D(4,4)$  を考える.

1. クラスタ間距離を, 最近接データ点間のマンハッタン距離, としたとき階層的クラスタ分析を行い, デンドログラムを描こう.
2. 非階層的クラスタ分析において, 目的関数を, クラスタ内データ間のマンハッタン距離の最大, のすべてのクラスタにわたる和, とする. このとき非階層的クラスタ分析を行って2個のクラスタに分けよう.

### 4

1. 非階層的クラスタ分析手法としての k-means 法の長所と短所を説明しよう.
2. k-means 法のアルゴリズムを説明しよう.

### 5

1.  $3 \times 3$  行列  $\begin{pmatrix} 1 & & \\ -2 & & \\ & & 1 \end{pmatrix}$   $(1 \ -2 \ 1)$  の固有値, 固有ベクトルを求めよう.
2. 固有値  $-1, 2$ , 固有ベクトル  $(\frac{1}{2}), (\frac{2}{-1})$  を持つ  $2 \times 2$  行列を作ろう.

## 理論物理学特論ファイナルトリアル略解

樋口さぶろお\*<sup>2</sup> 配布: 2012-08-03 Fri 更新: Time-stamp: "2012-08-07 Tue 09:30 JST hig"

■配点 1-5 各 20 点. 計 100 点.

1

1.  $\bar{x} = 5, \bar{y} = 10$ .
2.  $V_{xx} = 3/2, V_{yy} = 3/2, C(x, y) = -1$ .
3.  $R = -1/(\sqrt{3/2}\sqrt{3/2}) = -2/3$ .

■配点 1:4 点, 2:12 点, 3:4 点.

2

1. 行列の固有値は  $1 + \frac{\sqrt{2}}{2}, 1, 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$ . 対応する固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ -1 \end{pmatrix}.$$

よって,

2.  $z_1 = \frac{1}{2}(-x + \sqrt{2}y + z), z_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(x + z)$ .
3. 寄与率は,  $\frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{3}$ . 累積寄与率は,  $\frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{3}, \frac{2+\frac{\sqrt{2}}{2}}{3}, 1$ .

■配点 1:8 点, 2:4 点, 3:8 点.

3

1. 距離 1 で,  $\{\{A,B\},\{C\},\{D\}\}$ . 距離 3 で,  $\{\{A,B\},\{C,D\}\}$ . 距離 4 で,  $\{\{A,B,C,D\}\}$ .
2. 2 個の (空でない) クラスタへの分割方法は 7 個あるが, その中で最小となるのは  $\{A,B\},\{C,D\}$ . 目的関数の値は  $1 + 3 = 4$ .

■配点 1,2:各 10 点

---

\*<sup>2</sup> Copyright ©2012Saburo HIGUCHI. All rights reserved.

hig@math.ryukoku.ac.jp, <http://hig3.net>(講義のページもここからたどれます), へや:1 号館 5 階 502.

4

1. 略
2. 略

■配点 1,2:各 10 点

5

1. まず, 固有ベクトルとして  $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$  そのものがある. 固有値はこの絶対値の 2 乗で 6. 他の 2 個の固有値は 0. 対応する固有ベクトルは, (上のようにして作る行列が対象行列であることに注意すると)1 個目の固有ベクトルと直交するものを 2 個作ればよく, 例えば,  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  がとれる.
- 2.

$$\frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -2 & -6 \\ -6 & 7 \end{pmatrix}$$

固有値の並べ方を逆にしたのも同様に正解.

■配点 1,2:各 10 点