Metropolis-Hastings のアルゴリズム

樋口さぶろお

龍谷大学大学院理工学研究科数理情報学専攻

理論物理学特論 L12(2013-12-10 Tue)

今日の目標

1. Metropolis-Hastings 法で，与えた確率分布が MC の定常状態になっていることが説明できる.
2. Metropolis-Hastings 法のプログラムが書ける

http://hig3.net

L10-S1

Quiz 解答:マルコフ過程

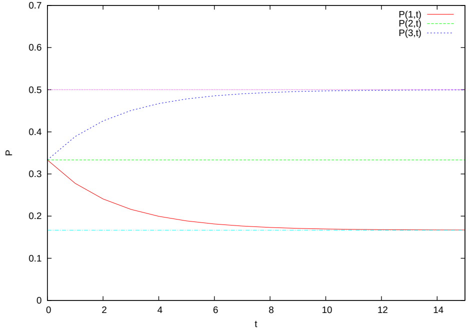
1. 固有値 $\lambda = 1$ に対応する T の固有ベクトルで, 確率ベクトルの条件 $\sum_i u_i = 1$ より, $\vec{u}(\infty) = \frac{1}{6}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$.
2.
3. a, b, c を初期条件から定まる定数として,

$$\vec{u}(t) = \begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ -4 & 0 & 2\\ 3 & 1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}(\frac{2}{5})^t & & \\ & (\frac{2}{3})^t & \\ & & 1^t\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}.$$

初期条件 $\vec{u}(0) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ より, $a = 0, b = -c = -\frac{1}{6}$ すなわち,

$$\vec{u}(t) = \frac{1}{6}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} - \frac{1}{6}(\frac{2}{3})^t\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}.$$

よって, $t \to \infty$ で定常状態に近づくことがわかる.


P(1,t)
P(2,t)
P(3,t)
P
t
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0
2
4
6
8
10
12
14

L11-S1
Quiz 解答:マルコフ過程

1. 遷移行列 T の固有値 λ, 固有ベクトル $\boldsymbol{u}$ を求めると,

$$\lambda = 1, \omega, \omega^2$$

$$\boldsymbol{u} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ \omega \\ \omega^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \omega^2 \\ \omega \end{pmatrix}$$

固有値 $\lambda = 1$ の固有ベクトルは $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ のみであり, これが唯一の定常状態.

2. 他の固有値 $\lambda = \omega, \omega^2$ は, $|\omega| = |\omega^2| = 1$ を満たす. よって, 一般には定常状態への収束は保証されない.
実際,

$$P(x,t) = P((x-t) \bmod 3, 0)$$

であり, 定常状態に収束するのは, 最初から $P(x,0) = \frac{1}{3}$ という定常状態にあったときに限られる.

Metropolis-Hastings のアルゴリズム

L12-Q1

Metropolis-Hastings 法

サンプルプログラムを書き替えて, Metropolis-Hastings 法で, 標本を生成してみよう.