集合★位相＋演習プチテスト

樋口さぶろお[1] 配布: 2007-11-06 Tue 更新: 2007-12-17 08:50JST

プチテスト参加案内

1. 全部で 5 問 60 分です.
2. 別に指示のある問以外は, 理由を数学的に答えよう.
3. 解答用紙の指定された面に指定された問を解答しよう.
4. 問題文に現れない記号を使うときは, 定義を記そう.

1

1. 集合 $X = \{x \in \mathbb{R} |\ x^5 - 3x^4 - x^3 + 4x^2 - 4x + 3 = 0\}$ とする. $1 \in X$, $2 \in X$, $3 \in X$ はそれぞれ真か偽か判定しよう.
2. 集合 $X = \{x \in \mathbb{R} |\ x \geq 2\}, Y = \{x \in \mathbb{R} |\ x^4 + x^2 + 1 \geq 21\}$ とする. $X \subset Y$, $Y \subset X$ はそれぞれ真か偽か判定しよう.
3. $X = \{x \in \mathbb{N} |\ \neg(x \leq 8 \vee x$ は偶数$)\}$ とする. $\{6, 7, 8, 9, 10\} \cap X$ を求めよう ($\cap$ は共通部分).

2

1. $A = \{x \in \mathbb{R} | \forall y \in \mathbb{R}\ (y^2 - xy + 3 \geq 0)\}$ とする. $-2 \in A, 3 \in A, 4 \in A$ の真偽をそれぞれ判定しよう.
2. $B = \{x \in \mathbb{N} | \exists y \in \mathbb{N}\ (x = y^2)\}$, $C = \{y \in \mathbb{N} | \exists x \in \mathbb{N}\ (x = y^2)\}$ とする. $3 \in B, 4 \in B, 3 \in C, 4 \in C$ の真偽をそれぞれ判定しよう.
3. $X = \{x \in \mathbb{R} |\ \neg(x \leq -2 \Rightarrow x \leq -5)\}$ とする. X を (開, 閉, 半開) 区間の記号で表そう.

3

この問では理由は不要です (ただし答が間違っていても, 何か正しいアイデアが書いてあるとそれに部分点を出すことはあります).

1. 集合 $X = \mathbb{R}, Y = (1, \infty)$ の間の全単射 $f : X \to Y$ をひとつ作り式 $f(x)$ で答えよう.
2. 集合 $X = \mathbb{N}, Y = \{n \in \mathbb{N} |\ n$ は 3 で割るとあまり $2\}$ の間の全単射 $f : X \to Y$ をひとつ作り式 $f(n)$ で答えよう.
3. 集合 $X = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 | x_2 = 2x_1^3\}$ の濃度を求めよう.
4. 集合 $X = \{-n^3 \in \mathbb{R} | n \in \mathbb{N}\}$ の濃度を求めよう.

hig@math.ryukoku.ac.jp, http://hig3.net(講義のページもここからたどれます), へや:1 号館 5 階 502.

4

次の写像 $f : X \to Y$ **は全射か?単射か?, 完全な証明でなくても図などを利用して説明すればよい.**

1. $X = \mathbb{N}, Y = \mathbb{R}, f(x) = -\mathrm{e}^{-2x}$.
2. $X = \mathbb{R}, Y = \{x \in \mathbb{R} | x < 0\}, f(x) = -\mathrm{e}^{-2x}$.
3. $X = \{0, 1, 2, 3, 4\}, Y = \mathbb{N}, f(n) = |2n - 10|$.
4. $X = \mathbb{R}^2, Y = \mathbb{R}^1, f(x_1, x_2) = 2x_1 + x_2$.

5

次の写像 $f : X \to Y$ **と, 部分集合** $X_1 \subset X, Y_1 \subset Y$ **に対して, 像** $f(X_1)$**, 逆像** $f^{-1}(Y_1)$ **を求めよう.**

1. $X = \mathbb{Z}, Y = \mathbb{Z}, f(n) = n^2, X_1 = \{-4, 0, 5\}, Y_1 = \{-4, -3, 0, 8, 9\}$.
2. $X = \mathbb{R}, Y = \mathbb{R}, f(x) = 2|x|, X_1 = [-2, 1], Y_1 = [-9, 5]$.
3. $X = \mathbb{R}^2, Y = \mathbb{R}^2, f(x_1, x_2) = (3x_1 - 2x_2, -6x_1 + 4x_2), X_1 = \{(1, -1)t \in \mathbb{R}^2 | t \in \mathbb{R}\}, Y_1 = \{(0, 0)\}$.

6　アンケート

アンケートにご協力ください. 成績とは無関係です.

1. **一通り解き終わるのにかかった時間を教えてください (分単位で).**
2. **次のうち, (部分的でも) 行ったプチテスト準備をすべて挙げてください.** (a) **ノートを読み直してみる** (b) **昨年度 (以前) のプチテストを解いてみる** (c)quiz **を解き直してみる** (d) **演習問題を解き直してみる** (e) **指定された教科書の問題を解いてみる** (f) **模範解答を作ろうプロジェクトをチェックしてみる** (f2) **他の受講者と相談する** (g) **チューターに質問する**
3. **上で挙げたうち, もっとも効果的だったプチテスト準備を挙げてください.**

おしまい

集合★位相＋演習プチテスト略解

樋口さぶろお[2] 配布: 2007-11-06 Tue 更新: 2007-12-17 08:50JST

1

1. $g(x) = x^5 - 3x^4 - x^3 + 4x^2 - 4x + 3$ とおいたとき, $g(1) = g(3) = 0, g(2) \neq 0$ より, $1, 3 \in X, 2 \notin X$.
2. $x \in X$ とすると, $x \geq 2$. このとき, $x^4 + x^2 + 1 \geq 21$ なので $x \in Y$. よって $X \subset Y$. 一方, $-2 \in Y$ かつ $-2 \notin X$ なので $Y \not\subset X$. 別解として $(x^2+5)(x^2-4) \geq 0$ と因数分解できてしまうといいので, $Y = (-\infty, -2] \cup [2, +\infty) = (-\infty, -2] \sqcup X$ とわかる (が, こうやってわかるのはラッキーな場合のみ)
3. ド-モルガンの法則を使って, $X = \{x \in \mathbb{N} | \neg(x \leq 8 \vee x \text{ は偶数})\} = \{x \in \mathbb{N} | (x > 8 \wedge x \text{ は奇数})\}$. よって, $\{6, 7, 8, 9, 10\} \cap X = \{9\}$.

講評とコメント 多くの人が正解していました. 3 で, 答が 9 になっている人もいましたが, 集合を質問されているので, $\{9\}$ です.

2

1. $-2 \in A$ が真かどうかを判定するには, $\forall y \in \mathbb{R}\ (y^2 - (-2)y + 3 \geq 0)$ が真であるかどうかを判定すればよい. この不等式は $(y+1)^2 + 2 \geq 0$ と書けるので真 (2 次の係数と判別式をチェックしてもよい). 同様に考えて, $-2, 3 \in A$, $4 \notin A$.
2. $x \in B \equiv (x$ は自然数 y の 2 乗として書ける$)$ なので, $4 = 2^2$ であり, $4 \in B$. 一方, 3 はそうは書けない $(\pm\sqrt{3} \notin \mathbb{N})$ ので $3 \notin B$.
   $y \in C \equiv (y$ の 2 乗 $x = y^2$ が自然数である$)$ なので, $3^2 = 9, 4^2 = 16 \in \mathbb{N}$ より, $3, 4 \in C = \mathbb{N}$
3. ド-モルガンの法則を用いて, $X = \{x \in \mathbb{R} | \neg(x > -2 \vee x \leq -5)\} = \{x \in \mathbb{R} | (x \leq -2 \wedge x > -5)\} = (-5, -2]$.

講評とコメント 1 で, 不等式を解いて複素数解がでてくるから, という方向からいっている人が多くいました. 複素数解がでてくるということは, $<$ から $>$ に切り替わるポイントがなくて一方の不等式が常に成立しているということです.

2 で, 変数として x, y のようなどの文字を使うかは関係ありません.

3 で $\neg(x > -2) \equiv x > 2$ となっている人がいました. $\neg$ はマイナスでなく否定 (negation) です.

3

1. $f(x) = 1 + \mathrm{e}^x$.
2. $f(n) = 3(n-1) + 2$.
3. $\aleph$. 実際 $f : \mathbb{R} \to X$, $f(x) = (x, 2x^3)$ は全単射.
4. $\aleph_0$. 実際 $f : \mathbb{N} \to X$, $f(n) = -n^3$ は全単射.

hig@math.ryukoku.ac.jp, http://hig3.net(講義のページもここからたどれます), へや:1 号館 5 階 502.

講評とコメント　2. で, $f(n) = 3n + 2$ **としている人もいましたが**, **そうすると**, $f(n) = 2 \in Y$ **となる** $n \in X$ **が存在せず**, **全射でなくなってしまいます** $(0 \notin \mathbb{N})$ **だから**.

4

1. **全射でない (例えば**, $f(x) = -\mathrm{e}^{-0.5} \in Y$ **となる** $x \in \mathbb{N}$ **はない**. $f(x) = \mathrm{e}^{-2} \in Y$ **となる** $x \in \mathbb{N}$ **はない**.). **単射である** ($f(x)$ **は単調増加)**
2. **全射である (任意の** $y \in Y$ **に対して** $x = -\frac{1}{2}\log(-y)$ **とれれば** $y = f(x)$). **単射である** ($f(x)$ **は単調増加**).
3. **単射である (具体的に対応を書けば明らか)**. **全射でない** ($f(x) = 1$ **となるような** $x \in X$ **はない**.)
4. **行列** $M = (2 \quad 1)$ **で表される線形写像**. $\ker f = \{\left(\begin{smallmatrix} -1 \\ 2 \end{smallmatrix}\right)t | t \in \mathbb{R}\} \neq \{\mathbf{0}\}$ **より単射でない**. $\mathrm{rank}\, M = 1 = \dim Y$ **より全射**.

5

1. $f(X_1) = \{-4^2, 0^2, 5^2\} = \{0, 16, 25\}$. Y_1 **の元のうち**, $-4, -3, 8, 9$ **は** $n \in \mathbb{Z}$ **を用いて** $f(n)$ **と書けないが**, $0 = 0^2, 9 = 3^2 = (-3)^2$ **なので**, $f^{-1}(Y_1) = \{-3, 0, 3\}$.
2. **グラフを描いて考えると**, $f(X_1) = [0, 4], f^{-1}(Y_1) = [-\frac{5}{2}, \frac{5}{2}]$.
3. $M = \left(\begin{smallmatrix} 3 & -2 \\ -6 & 4 \end{smallmatrix}\right), \boldsymbol{v} = \left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^2$ **のように書くと**, **行列とベクトルの積で**, $f(\boldsymbol{v}) = M\boldsymbol{v}$ **と書ける**.
   よって, $f(X_1) = \{M\boldsymbol{v} \mid \boldsymbol{v} \in X_1\} = \{\left(\begin{smallmatrix} 3 & -2 \\ -6 & 4 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)t | t \in \mathbb{R}\} = \{\left(\begin{smallmatrix} 5 \\ -10 \end{smallmatrix}\right)t | t \in \mathbb{R}\} = \{\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -2 \end{smallmatrix}\right)t | t \in \mathbb{R}\}$. **一方**, $f^{-1}(Y_1) = \ker f = \{\left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 3 \end{smallmatrix}\right)t | t \in \mathbb{R}\}$.

講評とコメント　**雰囲気で答えないで対応の図を描こう**.
区間の場合, **両端の値を写せばいいだけではない**.
$\mathbb{R}^2 \ni (x_1, x_2)$ **は** 2 **次元ベクトル空間**. $\{n^2 | n \in \mathbb{N}\}$ **ではありません…**.