集合★位相＋演習ファイナルトライアル

樋口さぶろお[1] 配布: 2008-01-29 Tue 更新: 2008-02-05 17:17JST

ファイナルトライアル参加案内

外部記憶ペーパー作成10分＋答案作成80分です.

1. **過程や計算過程は必須ではありません.**
2. **解答用紙の指定された欄に指定された問を解答しよう**.

1

1. **集合** $X = \{0, 3, 5, 10, 12, 13\}$ **と同値関係** $x_1 R x_2 \equiv (x_1 \equiv x_2 \pmod 5)$ **に関して**, **基本領域** (**のひとつの例**) **と**, **商集合を求めよう**.
2. **集合** $X = \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ **と同値関係** $x_1 R x_2 \equiv (x_1 - x_2$**は** 2 **の倍数**) **に関して**, **基本領域** (**のひとつの例**) **を求めよう**.
3. **集合** $X = \mathbb{R}$ **と同値関係** $x_1 R x_2 \equiv (x_1 - x_2$**が整数**) **に関して**, **基本領域** (**のひとつの例**) **を求めよう**.

2

1. $\mathbb{R}$ **上の** (**通常の**) **大小による順序関係を考える**. **部分集合**

$$X = \{x \in \mathbb{R} \mid (1 \leq x < 2) \vee (3 < x < 4)\}$$

について, **下界の集合**, **上界の集合**, **下限**, **上限**, **最小元**, **最大元が存在すれば求めよう**.

2. $\mathbb{Z}$ **上の** (**通常の**) **大小による順序関係を考える**. **部分集合**

$$X = \{x \in \mathbb{Z} \mid 3x < 19\}$$

について, **下界の集合**, **上界の集合**, **下限**, **上限**, **最小元**, **最大元が存在すれば求めよう**.

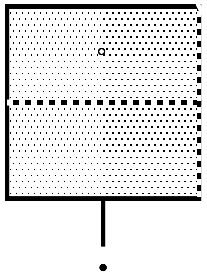
---

hig@math.ryukoku.ac.jp, http://hig3.net(講義のページもここからたどれます), へや:1 号館 5 階 502.

3

図示された $\mathbb{R}^2$ の部分集合 X について, 内部 X^{i}, 外部 X^{e}, 境界 X^{f}, 閉包 X^{a} をそれぞれ描こう.

注意: 極小の黒丸白丸は, その 1 点を含む, 含まないことを示す. 実線点線は, その線上を含む, 含まないことを示す.



4

$\mathbb{R}$ の次の部分集合を求め, 開集合であるか, 閉集合であるか, それぞれ答えよう.

1. $X_1 = \bigcap_{n=1}^{\infty} (-\frac{1}{n}, +\infty)$.
2. $X_2 = \bigcup_{n=1}^{\infty} (-\frac{1}{n}, +\infty)$.
3. $X_3 = \bigcap_{n=1}^{\infty} [+\frac{1}{n}, \frac{1}{2} + \frac{1}{n})$.
4. $X_4 = \bigcup_{n=1}^{\infty} [+\frac{1}{n}, \frac{1}{2} + \frac{1}{n})$.

5

写像 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ **ただし**,

$$f(x)=\begin{cases}x+1 & (x\neq 0)\\ 2 & (x=0)\end{cases}$$

を考える.

1. $\mathbb{R}$ **の数列** $[x_n]_{n\in\mathbb{N}}, \quad x_n=(-\frac{1}{2})^n$ **を考える**.
   (a) $[x_n]_{n\in\mathbb{N}}$ **は収束するか**? **するなら** $\lim_{n\to+\infty} x_n$, $f(\lim_{n\to+\infty} x_n)$ **を求めよう**.
   (b) **点列** $[f(x_n)]_{n\in\mathbb{N}}$ **は収束するか**? **するなら** $\lim_{n\to+\infty} f(x_n)$ **を求めよう**.
2. $\mathbb{R}$ **の数列** $[x_n]_{n\in\mathbb{N}}, \quad x_n=\begin{cases}0 & (n\ \textbf{は偶数})\\ 1+\frac{1}{n} & (n\ \textbf{は奇数})\end{cases}$ **を考える**.
   (a) $[x_n]_{n\in\mathbb{N}}$ **は収束するか**? **するなら** $\lim_{n\to+\infty} x_n$, $f(\lim_{n\to+\infty} x_n)$ **を求めよう**.
   (b) **点列** $[f(x_n)]_{n\in\mathbb{N}}$ **は収束するか**? **するなら** $\lim_{n\to+\infty} f(x_n)$ **を求めよう**.

6

1. **写像** $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ **ただし**,

$$f(x) = \begin{cases} +2|x| & (|x| \leq 2) \\ -2|x| & (|x| > 2) \end{cases}$$

を考える.

(a) **開集合** $X_1 = (-\frac{1}{2}, 1)$ **に対して像** $f(X_1)$ **を求めよう**.

(b) **開集合** $Y_1 = (2, 4)$ **に対して逆像** $f^{-1}(Y_1)$ **を求めよう**.

(c) **写像** f **は連続でない**. **開集合** Y_2 **で**, **逆像** $f^{-1}(Y_2)$ **が開集合とならないようなものを見つけ**, Y_2 **と** $f^{-1}(Y_2)$ **を答えよう**.

2. **写像** $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ **ただし**,

$$f(x) = \begin{cases} 1 & (x > 0) \\ 0 & (x = 0) \\ -1 & (x < 0) \end{cases}$$

を考える.

(a) **開集合** $X_1 = (-1, 1)$ **に対して像** $f(X_1)$ **を求めよう**.

(b) **開集合** $Y_1 = (-1.5, -0.5)$ **に対して逆像** $f^{-1}(Y_1)$ **を求めよう**.

(c) **写像** f **は連続でない**. **開集合** Y_2 **で**, **逆像** $f^{-1}(Y_2)$ **が開集合とならないようなものを見つけ**, Y_2 **と** $f^{-1}(Y_2)$ **を答えよう**.

$\boxed{\textbf{おしまい}}$

集合★位相＋演習ファイナルトライアル略解

樋口さぶろお[2]　**配布**: 2008-01-29 Tue **更新**: 2008-02-05 17:17JST

1

1. **基本領域 (の例)** $\{0, 12, 3\}$. **商集合** $\{\{0, 5, 10\}, \{12\}, \{3, 13\}\}$.
2. **基本領域 (の例)** $\{1, 2\}$. (**商集合** $\{$(**正の奇数全体**), (**正の偶数全体**)$\}$)
3. **基本領域 (の例)** $[0, 1)$. (**商集合** $\{\{n + x \mid n \in \mathbb{Z}\} \mid x \in [0, 1)\}$)

Remark　2. **の同値関係は** $x_1 R x_2 \equiv (x_1 \equiv x_2 \pmod 2)$ **と同じです**.

2

1. **下界の集合** $(-\infty, 1]$, **上界の集合** $[4, +\infty)$, **下限** $\inf X = 1$, **上限** $\sup X = 4$, **最小元** $\min X = 1$, **最大元 存在しない**.
2. $X = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \leq 6\}$. **下界の集合** $\emptyset$, **上界の集合** $\{x \in \mathbb{Z} \mid x \geq 6\}$, **下限 存在しない**, **上限** $\sup X = 6$, **最小元 存在しない**, **最大元** $\max X = 6$.

Remark　2. **では** $\mathbb{Z}$ **で考えているので**, **上界は整数です**. **したがって**, **上界の集合は** $[6, +\infty)$ **ではありません**.

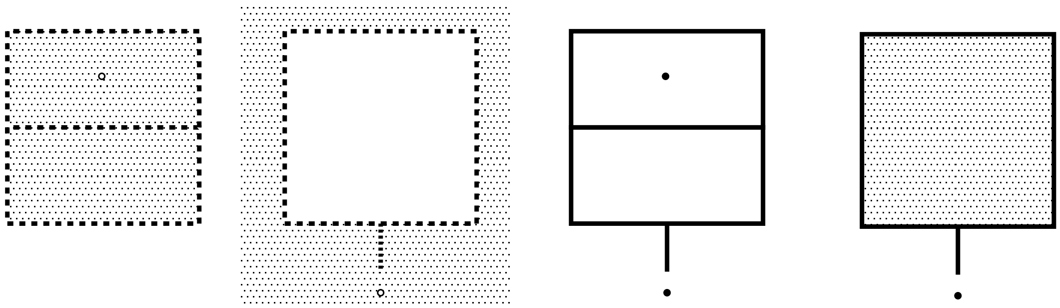
集合が空集合であることと, **集合がないこと**, **集合が存在しないこととは異ります**. **その集合に元が存在しないとき**, **集合は空集合です**.

例えば, $x^2 = 1$ **である実数は存在しません**. $x^2 = 1$ **である実数すべてからなる集合は空集合です**.

例えば, **実数の部分集合で**, **元の個数が負であるようなものは存在しません**. **実数の部分集合で**, **元の個数が負であるようなものは空集合**, **というわけではありません**. **実数の部分集合で**, **元の個数が負であるようなものすべてからなる集合** (**巾集合の部分集合**) **は空集合です**.

3

左から内部 X^{i}, **外部** X^{e}, **境界** X^{f}, **閉包** X^{a}.



[2]Copyright ©2007 Saburo HIGUCHI. All rights reserved.
hig@math.ryukoku.ac.jp, http://hig3.net(**講義のページもここからたどれます**), **へや**:1 **号館** 5 **階** 502.

4

1. $[0, +\infty)$. **開集合でない**. **閉集合である**.
2. $(-1, +\infty)$. **開集合である ((かし** 3) **からもいえる)**. **閉集合ではない**.
3. $\emptyset$. **開集合である (かし** 1). **閉集合である (へし** 1).
4. $(0, +\frac{3}{2})$. **開集合である**. **閉集合ではない**.

5

1.
   (a) $|x_n| = (\frac{1}{2})^n \to 0$ **であり** $[x_n]$ **は収束する**. $\lim_{n\to+\infty} x_n = 0$. $f(\lim_{n\to+\infty} x_n) = f(0) = 2$.

   (b) $x_n \neq 0$ **より** $f(x_n) = (-\frac{1}{2})^n + 1$ **であり** $[f(x_n)]$ **は収束する**. $\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = 1$.

2.
   (a) $x_{2k} = 0 \to 0, x_{2k+1} \to 1$ **より** $[x_n]$ **は収束しない**. $\lim_{n\to+\infty} x_n$, $f(\lim_{n\to+\infty} x_n)$ **は存在しない**.

   (b) $f(x_{2k}) = f(0) = 2$, $f(x_{2k+1}) = f(1 + \frac{1}{2k+1}) = 2 + \frac{1}{2k+1} \to 2$ **より**, $[f(x_n)]$ **は収束する**. $\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = 2$.

6

1.
   (a) $f(X_1) = [0, 2)$.

   (b) $f^{-1}(Y_1) = (-2, -1) \cup (1, 2)$.

   (c) **例えば** $Y_2 = (2, 6)$ **に対して**, $f^{-1}(Y_2) = [-2, -1) \cup (1, 2]$ **は開集合でない (閉集合でもない)**. $Y_2 = (-1, 6)$ **に対して**, $f^{-1}(Y_2) = [-2, +2]$ **は開集合でない (閉集合ではある)**.

2.
   (a) $f(X_1) = \{-1, 0, +1\}$.

   (b) $f^{-1}(Y_1) = (-\infty, 0)$.

(c) **例えば** $Y_2 = (-1.5, 0.5)$ **に対して**, $f^{-1}(Y_2) = (-\infty, 0]$ **は開集合でない** (**閉集合ではある**). $Y_2 = (-0.5, 0.5)$ **に対して**, $f^{-1}(Y_2) = \{0\}$ **は開集合でない** (**閉集合ではある**).

http://hig3.net