集合★位相＋演習

樋口さぶろお[1] 配布: 2007-09-25 Tue 更新: Time-stamp: "2008-01-24 Thu 21:26 JST hig"

この授業ののり

講義と演習　2 講時連続ですが, 講義と演習の区別はありません. 1 講時の最初と 2 講時の最後に quiz をやります.

成績決定方法　計 60 点以上が合格です. 100 点を越えた分は切り捨てます.

quiz(後述) 20 点 + プチテスト (11 月中を予定) 30 点
+ ファイナルトライアル (期末試験期間の火を予定) 60 点
(+任意参加の模範解答を作ろうプロジェクト 20 点)

quiz　Quiz では, 持ち込み, 相談はなしで自分のパワーを計測してもらいます (持ち込みがないとしんどいような問題は出しません). 病気, 交通機関遅延などの場合は, 証明書コピーと欠席届を出してくれれば点数計算上 quiz 参加とみなします. 出題内容は, その回または直前の回に扱った例題を少し変更したものです.

講義の Web ページ　`http://www.math.ryukoku.ac.jp/~hig/topology/` です.

`http://hig3.net/` から簡単にたどっていけます. いくつかのページは携帯対応してます. (下の QR コード)

連絡方法　学生のみなさんに重要なお知らせがある場合は, 新しいメールアドレス `@mail.ryukoku.ac.jp` に送ります. 学生のみなさんから樋口に連絡したいときは, `hig@math.ryukoku.ac.jp` に送ってください (他にも上の Web ページから匿名で送るなどできます).

`http://hig3.net`

オフィスアワー　月木 6 講時 (18:20-19:20), 1-502 または 1-539.

教科書　鈴木晋一, 集合と位相への入門 — ユークリッド空間の位相, サイエンス社 (2003).

再履修のみなさんへ　2006 年度の授業と比較して, 科目の精神は変わりませんが, 内容は変化しています.

`hig@math.ryukoku.ac.jp`, `http://hig3.net`(講義のページもここからたどれます), へや:1 号館 5 階 502.

1　論理の言葉で語ろう

今日の目標

1. 論理演算ができるようになろう (情報処理システム II の復習?)
2. 証明しやすい形に命題を同値変形できるようになろう
3. $\forall$ と $\exists$ を使い分けられるようになろう
4. de Morgan の法則で否定を作れるようになろう
5. 証明の型を知ろう

1.1　論理演算

説明 1.1

真偽表 鈴木 p.4

		または	かつ	否定	ならば	同等
P	Q	$P \vee Q$	$P \wedge Q$	$\neg P$	$P \Rightarrow Q$	$P \Leftrightarrow Q$
T	T	T	T	F	T	T
T	F	T	F	F	F	F
F	T	T	F	T	**T**	F
F	F	F	F	T	T	T

$P \Leftrightarrow Q$ とは $(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$ のこと.

1.1.1　真偽表を作ろう

$(\neg A) \vee B$ の真偽表を作ろう

1.1.2　真偽表を作ろう

1. $(\neg A) \Rightarrow B$ の真偽表を作ろう.
2. $(\neg A) \Rightarrow (\neg B)$ の真偽表を作ろう.

1.1.3　真偽表を作ろう

問題 1.1 鈴木 p.5.

1.1.4　真偽表を作ろう

$A \Rightarrow B, B \Rightarrow A, (\neg A) \Rightarrow (\neg B), (\neg B) \Rightarrow (\neg A)$ の真偽表を作って比べよう.

1.2　トートロジーと同値

説明 1.2 よくあるトートロジー

- $\neg(P \wedge (\neg P))$　　$\neg$(矛盾)
- $P \vee (\neg P)$ 排中律
- $P \Leftrightarrow \neg(\neg P)$ 二重否定の除去
- $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow ((\neg Q) \Rightarrow (\neg P))$ 対偶

1.2.1

1. ‘このリングが輝いているならこのリングは金でできている　’の対偶を作ろう.
2. 真偽表を使って $\neg(A \wedge (\neg A))$ がトートロジーであることを示そう.

1.2.2

1. ‘π が整数であるなら 2 は整数である’ の対偶を作ろう
2. 真偽表を使って $(A \Rightarrow B) \equiv ((\neg B) \Rightarrow (\neg A))$ を示そう.

1.2.3

1. ‘今日の天気が雨であるなら今日の運動会は中止である’ の対偶を作ろう
2. 真偽表を使って $(A \wedge (\neg A)) \Rightarrow B$ がトートロジーであることを示そう. これってどういうこと?

1.2.4

1. 問題 1.2 鈴木 p.6

1.2.5

説明 1.2 に出てきたものがトートロジーであることを示そう.

1.3　全称記号 $\forall$ と存在記号 $\exists$

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$:自然数全体, $\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$:整数全体, $\mathbb{Q}$:有理数全体, $\mathbb{R}$:実数全体, $\mathbb{C}$:複素数全体.

1.3.1

1. x を実数の範囲で考えるとき $\forall x(x^2 + 3x + 2 = 0)$, $\exists x(x^2 + 3x + 2 = 0)$ はそれぞれ真か偽か考えよう.

1.3.2

1. x を実数の範囲で考えるとき, $\exists x(-x^2+2x-1 \geq -1)$, $\forall x(-x^2+2x-1 \geq -1)$ はそれぞれ真か偽か考えよう.

1.3.3

1. x を実数の範囲で考えるとき, $\exists x(x > 2)$, $\forall x(x > 2)$ はそれぞれ真か偽か考えよう.

1.3.4

次の定理や定義を, $\forall$ や $\exists$ を使って書こう.

1. 相加平均は相乗平均以上である.
2. 2 次方程式の判別式が正なら実解をもつ.

1.4 de Morgan の法則

説明 1.4

P, Q: 命題, $P(x)$: 命題関数のとき

$$
\begin{aligned}
\neg(P \wedge Q) &\equiv (\neg P) \vee (\neg Q) \\
\neg(P \vee Q) &\equiv (\neg P) \wedge (\neg Q) \\
\neg(\forall x\ P(x)) &\equiv \exists x(\neg P(x)) \\
\neg(\exists x\ P(x)) &\equiv \forall x(\neg P(x)) \\
\text{(応用)}\neg(P \Rightarrow Q) &\equiv \neg((\neg P) \vee Q) \equiv (P \wedge (\neg Q))
\end{aligned}
$$

1.4.1 de Morgan の法則

'$a > 1$ または $a \leq -2$ ' の否定を作ろう.

1.4.2 de Morgan の法則

'ET は生物であり, かつ, 地球外生まれである' の否定を作ろう.

1.4.3 de Morgan の法則

'行列 M は正則行列であるが単位行列の定数倍ではない' の否定を作ろう.

1.4.4

次の命題の否定を作ろう.

1. トトロはたぬきであるかパンダであるかである
2. ペンギンは鳥であり かつ 哺乳類である
3. すべての哺乳類は授乳する
4. 卵から生まれるコアラもいる
5. コインの比重が 1 より大きいなら水に沈む

1.4.5

次の命題の否定を作ろう.

1. その動物がペンギンであるならば, それは鳥でありかつ飛ばない
2. その人が博物館に無料で入場できるなら, その人は 60 歳以上または学生である.
3. ウルトラマンが実在するならすべての宇宙怪獣は地球侵略を思いとどまる

1.4.6

つぎの命題の対偶を作ろう. $\exists x \in \mathbb{R}(ax > 0) \Rightarrow a \neq 0.$

1.4.7

C 言語で書かれた次のプログラムの一部を考える. P, Q, R, S, T は命題に相当する条件文であり, その真偽はプログラム開始時点で定まっており, if-then-else 節の途中で変化しない.

```
if(P ){
    文 A
    if(Q && !S){
        文 B
    } else {
        文 C
    }
} else if(R || T){
    文 D
} else {
    文 E
}
```

これを次の形に書き直そう.

```
if(条件文 X){
    文 A
}
if(条件文 Y){
    文 B
}
if(条件文 Z){
    文 C
}
if(条件文 U){
    文 D
}
if(条件文 V){
    文 E
}
```

1.5 証明の方法

典型的な証明方法

- $\neg P$: P **を仮定すると矛盾することを示す**.
- $P \Rightarrow Q$: P **を仮定して** Q **を示す**.
- $P \vee Q$: $(\neg P) \Rightarrow Q$ **を示す**.
- $P \wedge Q$: P, Q **の両方を別々に示す**.
- $\forall x \in \mathbb{Z}\ P(x)$: $x \in \mathbb{Z}$ **だけを仮定して** $P(x)$ **を示す**.
- $\exists x \in \mathbb{Z}\ \neg P(x)$: **ある具体的な** $a \in \mathbb{Z}$ **に対して** $P(a)$ **が真であることを示す**.