集合★位相＋演習

樋口さぶろお[1] **配布**: 2007-10-02 Tue **更新**: Time-stamp: "2008-01-24 Thu 21:23 JST hig"

2 集合の言葉で語ろう

今日の目標

1. 先週やった論理の計算を使って、 集合の計算ができるようになろう.
2. $a \in A$, $A \subset B$, $A = B$ が証明できるようになろう.
3. 巾集合のイメージを持とう.

2.1 集合に元が属するって?

説明 2.1

集合 $A \leftrightarrow$ 命題関数 $P(x)$.
$A = \{x \in \mathbb{R} | P(x)\}$. 鈴木 p.9,p.10
$a \in A$ を示すには, $P(a)$ が T であることをいう. 鈴木 p.9,p.10
$P(x)$ が常に F のとき, $A = \emptyset$ (空集合). 鈴木 p.15

2.1.1

$B = \{x \in \mathbb{R} |\ x^5 + x^3 + x^2 - 2x - 1 = 0\}$ とする. $-1 \in B$, $0 \in B$, $+2 \in B$ かどうか, それぞれ調べよう.

2.1.2

$A = \{x \in \mathbb{R} |\ \forall y \in \mathbb{N}\ (xy < 0)\}$ とする. $+1 \in A$, $0 \in A$, $-1 \in A$ かどうか, それぞれ調べよう.

2.1.3

$A = \{x \in \mathbb{R} |\ \forall y \in \mathbb{R}\ (xy \geq 0)\}$ とする. $+1 \in A$, $0 \in A$, $-1 \in A$ かどうか, それぞれ調べよう.

[1]
hig@math.ryukoku.ac.jp, http://hig3.net(講義のページもここからたどれます), へや:1 号館 5 階 502.

2.1.4

$A = \{x \in \mathbb{R} |\ \exists y \in \mathbb{R}\ (y^2 + xy + 1 = 0)\}$ **とする**. $+1 \in A$, $4 \in A$, $16 \in A$ **かどうか**, **それぞれ調べよう**.

2.2　部分集合って? 集合が等しいって?

説明 2.2

以後, $A = \{x \in \mathbb{R} |\ P(x)\}, B = \{x \in \mathbb{R} |\ Q(x)\}$ **とします**. 鈴木 p.11,p.12

$$
\begin{aligned}
&A \text{ は } B \text{ の部分集合} \\
\equiv &(A \subset B) \\
\equiv &\forall x \in \mathbb{R}\ (x \in A \Rightarrow x \in B) \\
\equiv &\forall x \in \mathbb{R}\ (P(x) \Rightarrow Q(x))
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
A = B \equiv &(A \subset B) \wedge (A \supset B) \\
\equiv &\forall x\ (P(x) \Leftrightarrow Q(x)).
\end{aligned}
$$

2.2.1

$A = \{x \in \mathbb{R} |\ x^2 = 1\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} |\ x^5 + x^3 + x^2 - 2x - 1 = 0\}$ **とする**. $A \subset B, B \subset A$ **がそれぞれ真か偽か調べよう**.

2.2.2

$A = \{x \in \mathbb{R} |\ x^2 = 1\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} |\ x^4 - 1 = 0\}$ **とする**. $A \subset B, B \subset A$ **がそれぞれ真か偽か調べよう**.

2.2.3

$A = \{x \in \mathbb{R} |\ x^2 + 1 = 0\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} |\ x^4 - 1 = 0\}$ **とする**. $A \subset B, B \subset A$ **がそれぞれ真か偽か調べよう**.

2.3　集合から集合をつくろう

説明 2.3

共通部分 $A \cap B = \{x \in \mathbb{R} | P(x) \wedge Q(x)\}$ 鈴木 p.12
和集合 $A \cup B = \{x \in \mathbb{R} | P(x) \vee Q(x)\}$ 鈴木 p.12
補集合 $A^{\mathrm{c}} = \{x \in \mathbb{R} | \neg P(x)\}$ 鈴木 p.12
差集合 $A \setminus B = \{x \in \mathbb{R} | P(x) \wedge (\neg Q(x))\}$ 鈴木 p.12
直積 $A \times B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | P(x) \wedge Q(y)\}$. 鈴木 p.17
巾集合 $2^A = \{B | B$ **は** A **の部分集合** $\}$ 鈴木 p.15

2.3.1

$A = \{0, 1\}, B = \{1, 2, 3\}$ **とする．集合** $A \cap B, A \cup B, A \times B, 2^B$ **を求めよう**．

2.3.2

$A = [0, 2) \in \mathbb{R}, B = (1, 4] \in \mathbb{R}$ **(半開区間) とする．集合** $A \cap B, A \cup B$ **を求めよう**．$A \times B$ **の図を描こう**．

2.3.3

$A = \{x \in \mathbb{R} | \neg(x > -1 \wedge x \leq 2)\}$ **を簡単化して区間の記号で書こう**．

2.3.4

$A = \{x \in \mathbb{N} | \neg(x$ **は素数** $\vee x \geq 10)\}$ **を簡単化しよう**．

2.3.5

$A = \{x \in \mathbb{N} | (x$ **は偶数** $\Rightarrow x \leq 5)\}$ **を簡単化しよう**．

2.3.6

$A = \{x \in \mathbb{R} | \neg(x \leq 3 \Rightarrow x < 10)\}$ **を簡単化して区間の記号で書こう**．

2.3.7　巾集合

鈴木 問題 1.6, p.15

2.4 集合族の和集合, 共通部分, 直積集合

説明 2.4

$\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ **が集合族のとき**,

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n.$$

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n.$$

$$\prod_{i=1}^{n} A_i = A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) | x_i \in A_i\}.$$

$\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ **のような集合族も考えられる**. $\Lambda = \mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{R}$ **その部分集合**… 鈴木 p.15

同じような内容をあとでもういちど真剣にやります.

2.4.1

集合族 $\{A_i\}_{i=1}^{n}$ **を**, $A_i = [i, i+1] \in \mathbb{R}$ **(閉区間) とするとき**, $\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i$, $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$ **を区間として求めよう**.

2.4.2

集合族 $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ **を**, $A_i = [-\frac{1}{i}, +\frac{1}{i}] \in \mathbb{R}$ **(閉区間) とするとき**, $\bigcap\limits_{i\in\mathbb{N}} A_i$, $\bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}} A_i$ **を区間として求めよう**.

2.4.3

集合族 $\{A_x\}_{x\in\mathbb{R}}$ **を**, $A_x = [-\frac{1}{1+x^2}, |x|] \in \mathbb{R}$ **(閉区間) とするとき**, $\bigcap\limits_{x\in\mathbb{R}} A_x$, $\bigcup\limits_{x\in\mathbb{R}} A_x$ **を区間として求めよう**.