集合★位相＋演習

樋口さぶろお[1] **配布**: 2007-10-09 Tue **更新**: Time-stamp: "2008-01-24 Thu 21:26 JST hig"

3 写像の言葉で語ろう

今日の目標

1. **合成写像**, **逆写像が計算できる**
2. **全射・単射が判定できる**
3. **写像による集合の像**, **逆像が求められる**

3.1 だれにでも秘密はある VS だれもが知っている秘密

説明

$P(x,y)$ **が** $x \in X, y \in Y$ **の** 2 **変数の命題関数のとき**,

$$Q(x) \equiv \forall y \in Y\ P(x,y),$$
$$R(x) \equiv \exists y \in Y\ P(x,y)$$

は 1 **変数の命題関数**. **よって**,

$$\forall x \in X\ Q(x) \equiv \forall x \in X\ \forall y \in Y\ P(x,y),$$
$$\exists x \in X\ Q(x) \equiv \exists x \in X\ \forall y \in Y\ P(x,y),$$
$$\forall x \in X\ R(x) \equiv \forall x \in X\ \exists y \in Y\ P(x,y),$$
$$\exists x \in X\ R(x) \equiv \exists x \in X\ \exists y \in Y\ P(x,y)$$

などが考えられる.

上では先に y **に** $\forall, \exists$ **をつけたが**, $\forall x \exists y\ P(x,y)$ **と** $\exists y \forall x\ P(x,y)$ **の意味は違うので注意**.

3.1.1

次のうち正しいのはどれ?

1. $\forall n \in \mathbb{N}\ \exists m \in \mathbb{N}\ (m > n)$
2. $\exists m \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}\ (m > n)$

[1]
hig@math.ryukoku.ac.jp, http://hig3.net(**講義のページもここからたどれます**), **へや**:1 **号館** 5 **階** 502.

3.1.2

S: (死んだ人も含め) 人間の集合, $P(x,y)$ を 'x は y の母親である' という命題関数とする. 常識的に考えて正しいのはつぎのうちどれ?

1. $\forall x \in S\ \forall y \in S \quad P(x,y)$.
2. $\forall y \in S\ \exists x \in S \quad P(x,y)$.
3. $\forall x \in S\ \exists y \in S \quad P(x,y)$.
4. $\exists x \in S\ \forall y \in S \quad P(x,y)$.

3.1.3

X: ある人間の集合, Y: 世の中のすべてのニュースの集合 (集合かどうかすこし疑問)

$x \in X, y \in Y$ のとき, $P(x,y)$ を 'y は x だけが知っている秘密' という命題関数とする. 常識的に考えて 'だれにでも秘密はある' と読めるのはどれ?

1. $\exists x \in X\ \forall y \in Y \quad P(x,y)$.
2. $\exists y \in Y\ \forall x \in X \quad P(x,y)$.
3. $\forall x \in X\ \exists y \in Y \quad P(x,y)$.
4. $\forall y \in Y\ \exists x \in X \quad P(x,y)$.

3.2 写像って?

説明

鈴木 p.18 写像 $y = f(x) = x^2$ は x を $y = x^2$ に対応させる.
x, y の属する集合 X, Y を意識して

$f : X \to Y,$	(写像名):(定義域)→(ターゲット集合)
$f : x \mapsto x^2$	(写像名):(原像)↦(像)
$f : X \ni x \mapsto y \in Y$	(写像名):(定義域)∋(原像)↦(像)∈(ターゲット集合)

などと書く. ここで,
X: 始集合, 定義域. 例:$\mathbb{R}, \mathbb{N}, [1,3), \ldots$
Y: 終集合, ターゲット集合 (教科書とちょっと流儀が違う). 例: $\mathbb{R}, \mathbb{N}, [1,9), \ldots$
$f(x) = y$ のとき, y は x の像, x は y の原像.

3.2.1 次の写像へんならどこがへん?

1. $\mathbb{R} \ni x \mapsto \sqrt{x} \in \mathbb{R}$.
2. $\mathbb{R} \ni x \mapsto x^3 \in [0, +\infty)$.

3.2.2　次の写像へんならどこがへん?

1. $\mathbb{R} \ni x \mapsto \mathrm{e}^x \in \mathbb{R}$.
2. $[0,+\infty) \ni x \mapsto \pm\sqrt{x} \in \mathbb{R}$.
3. $(-1,4] \ni x \mapsto x^2 \in [0,+\infty)$.
4. $\mathbb{R} \ni x \mapsto \log x \in \mathbb{R}$.
5. $[0,4\pi) \ni x \mapsto \sin(2x) \in \mathbb{R}$.

3.3　全射・単射・全単射

説明

鈴木 p.19 **写像** $f : X \to Y$

1. f **が単射** $\equiv \ \forall x_1, x_2 \in X(x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2))$
   $\equiv \ \forall x_1, x_2 \in X(f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2)$. **(対偶)**
2. f **が全射** $\equiv \ \forall y \in Y \exists x \in X \ (f(x) = y)$
3. f **が全単射** $\equiv$ (f **は単射** $\wedge$ f **は全射**)

3.3.1　この写像って全射?単射?全単射?

1. $\mathbb{R} \ni x \mapsto 2x \in \mathbb{R}$.
2. $\mathbb{Z} \ni x \mapsto 2x \in \mathbb{Z}$.
3. $\mathbb{R} \ni x \mapsto x^3 \in \mathbb{R}$.
4. $\mathbb{R} \ni x \mapsto x^4 \in \mathbb{R}$.
5. $\mathbb{R} \ni x \mapsto x^2 \in [0,+\infty)$.

3.3.2　この写像って全射?単射?全単射?

1. $(2,4] \ni x \mapsto x^2 \in [0,+\infty)$.
2. $[0,2\pi) \ni x \mapsto \cos(x) \in \mathbb{R}$.
3. $(0,+\infty) \ni x \mapsto \log(x) \in \mathbb{R}$.
4. $\mathbb{R} \ni x \mapsto |x| \in [0,+\infty)$.

3.4　恒等写像・合成写像・逆写像

説明

鈴木 p.21 $\mathrm{id}_X : X \ni x \mapsto x \in X$ を恒等写像という.
鈴木 p.19 $f : X \to Y, \quad g : Y \to Z$ のとき, 合成写像 $g \circ f$ が考えられる. $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.
鈴木 p.21 $f : X \to Y$ が全単射のとき, f の逆写像 f^{-1} がある. $f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_X, f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_Y$.

3.4.1　合成写像・逆写像をつくろう

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h : (-\infty, -1] \to [1, +\infty)$ で, $f(x) = x^2 + 2x + 2, g(x) = 2x - 3, h(x) = x^2 + 2x + 2$ とする.

1. $(f \circ g)(x)$ を求めよう.
2. $(g \circ f)(x)$ を求めよう.
3. $g^{-1}(y)$ を求めよう.
4. $h^{-1}(y)$ を求めよう.

3.4.2　合成写像・逆写像をつくろう

次の写像に対して逆写像を作ろう.

1. $f : [-\frac{3}{4}\pi, -\frac{1}{4}\pi] \to [-3, 3]$, $f(x) = 3\sin(2x + \pi)$
2. $f : (-\infty, +\infty) \to (-2, 2)$, $f(x) = 2\,\mathrm{Tan}^{-1}(3x)$
3. $f : \mathbb{R} \to (1, +\infty)$, $f(x) = 3\mathrm{e}^{-2x} + 1$

3.4.3　合成写像・逆写像をつくろう

鈴木 問題 1.9(p.21)

3.5　集合の像・集合の逆像・値域

説明

鈴木 p.22 全単射とはかぎらない写像 $f : X \to Y$ に対して,
$X_1 \subset X$ に対して, $f(X_1) := \{f(x) \in Y | x \in X_1\}$ を X_1 の像という.
$Y_1 \subset Y$ に対して, $f^{-1}(Y_1) := \{x \in X | f(x) \in Y_1\}$ を Y_1 の逆像という.
f が全射 $\equiv f(X) = Y$.

3.5.1　集合の像・集合の逆像・値域を求めよう

$f : \mathbb{R} \ni x \mapsto x^2 \in \mathbb{R}$, $X_1 = (-4, 2]$, $Y_1 = (-1, 9]$ **を考える**. **像** $f(X_1)$, **逆像** $f^{-1}(Y_1)$ **を求めよう**.

3.5.2　集合の像・集合の逆像・値域を求めよう

$f : \mathbb{R} \ni x \mapsto x^2 \in \mathbb{R}$, $X_1 = (-4, 2]$, $Y_1 = (-1, 9]$ **を考える**. $f(f^{-1}(Y_1))$, $f^{-1}(f(X_1))$ **を求めよう**. **次のうち**, **正しいものをすべて挙げよう**.

1. $f(f^{-1}(Y_1)) \subset Y_1$
2. $f(f^{-1}(Y_1)) \supset Y_1$
3. $f^{-1}(f(X_1)) \subset X_1$
4. $f^{-1}(f(X_1)) \supset X_1$

3.5.3

写像 $f : \mathbb{R} \ni x \mapsto 1 \in \mathbb{R}$ **(こういうのを定数写像という)と**, $X_1 = (2, 3), Y_1 = (-3, -2)$ **に対して**, $f(X_1), f^{-1}(Y_1), f^{-1}(f(X_1)), f(f^{-1}(Y_1))$ **を求めよう**.

3.5.4

写像 $f : \mathbb{N} \ni n \mapsto \sin(\frac{1}{2}n\pi) \in \mathbb{R}$ **を考える**. $X_1 = \{2, 4, 6\}, Y_1 = [0, +\infty)$ **に対して** $f(X_1), f^{-1}(Y_1)$ **を求めよう**.