

[目次](#) [前回](#) [次回](#) [今回の解答](#)

集合 位相 + 演習

樋口さぶろお¹ 配布: 2007-10-16 Tue 更新: Time-stamp: "2008-01-24 Thu 21:39 JST hig"

4 2次元の集合と写像を語ろう

今日の目標

1. 写像 $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ をイメージできるようになろう.
2. 写像 $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ で全射, 単射を判定できるようになろう.
3. 線形代数 II は天国だったことを知ろう.

4.1 1次元の写像をゴムひもで描こう

説明

定義域 $I = [0, 1] = \{x \in \mathbb{R} | 0 \leq x \leq 1\}$.

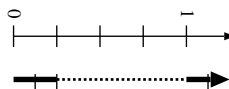
ターゲット集合 $Y = \mathbb{R}$

写像 $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ を図解する方法は, 横軸 x 縦軸 y のグラフばかりじゃない!

4.1.1

写像 $f: I \rightarrow \mathbb{R} \in \mathbb{R}$ を考える.

1. 写像 $f(x) = |1 - 2x|$ をゴムひもで描こう.
2. 次のゴムひもで表される写像 f の式を求めよう.

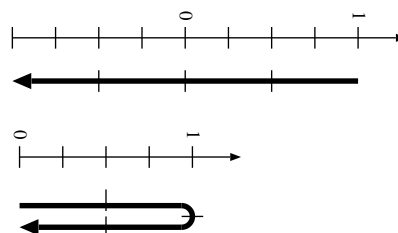


¹Copyright ©2007,2008 Saburo HIGUCHI. All rights reserved.

4.1.2

写像 $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ を考える

1. 写像 $f(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}x$ をゴムひもで描こう.
2. 写像 $f(x) = \begin{cases} 2x & (0 \leq x \leq \frac{1}{2}) \\ 2x - 1 & (\frac{1}{2} < x \leq 1) \end{cases}$ をゴムひもで描こう.
3. 次のゴムひもで表される写像 f の式を求めよう.



4. 次のゴムひもで表される写像 f の式を求めよう.

4.2 2次元の写像をゴム板で描こう

説明

定義域 $X = I^2 = I \times I = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 \in I, x_2 \in I\}$.

ターゲット集合 $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x_1, x_2) \mid x_1 \in \mathbb{R}, x_2 \in \mathbb{R}\}$.

例: $f : I^2 \ni (x_1, x_2) \mapsto (x_1 + 2, 3x_2) \in \mathbb{R}^2$

4.3 線形写像は天国

説明

線形写像は写像の中でも特にきれいで扱いやすいやつ.

ベクトル空間 V, W , 線形写像: $f : V \rightarrow W$ に対して, f を表す行列を M とする.

- f が単射 $\equiv \ker f = \{0\}$.
- f が全射 $\equiv \text{rank } M = \dim W$.
- f が全単射 $\equiv (M \text{ が正方行列}) \wedge (\det M \neq 0)$.
- $\text{Im } f = f(V), \ker f = f^{-1}(\{0\})$

4.3.1

次の行列の表す線形写像 $f : V \rightarrow W$ に対して, 部分空間 $f(V), f^{-1}(\{0\})$ の次元を求めよう. 線形写像 f は全射か, 単射か, 全単射か, 考えよう.

1. $\begin{pmatrix} +1 & +2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$

2. $\begin{pmatrix} -4 \\ -2 \end{pmatrix}$

4.3.2

次の写像 f は全射か, 単射か, 全単射か, 考えよう.

1. $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $f(x_1, x_2) = (x_1 + 2x_2, -3x_1 - 4x_2)$.
2. $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $f(x_1, x_2, x_3) = (-4x_1 - 2x_2 - x_3, 40x_1 + 20x_2 + 10x_3)$.
3. $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^1$, $f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$.

4.3.3

次の行列の表す線形写像 $f: V \rightarrow W$ は全射か, 単射か, 全単射か, 考えよう.

1. $\begin{pmatrix} +1 & +2 & 3 \\ -3 & -4 & 5 \end{pmatrix}$
2. $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
3. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$



[目次](#) [前回](#) [次回](#) [今回の解答](#)