集合★位相＋演習

樋口さぶろお[1] 配布: 2007-10-23 Tue 更新: Time-stamp: "2008-01-24 Thu 21:13 JST hig"

超重要な お知らせ

1 講時演習 2 講時講義に分割してみます

アンケート結果への不完全な対応策です. 今日から 4 回くらいはこれで行ってみます.

講義の内容の問題を配って, それを 1 週間後の演習でやります. できれば 1 週間後の演習までに自分で解いておいてね.

1 講時の演習は 8 チームに分割してエリア指定します.

プチテストやります

2007-11-06(火)1 講時です (最初にいっていたのより 1 週間早い) 持込不可です.

模範解答を作ろうプロジェクト!で最大 20 点ゲット!

集合★位相＋演習の, 大学院入試の過去問や, プチテスト/ファイナルトライアルの準備に役立つ典型的な問題の模範解答を作ってみんなで共有するプロジェクトです. その貢献に対して 1 問あたり最大 10 点, 1 人あたり最大 20 点の加算があります.

ReLS `https://r-els.media.ryukoku.ac.jp` → 集合★位相＋演習 → 模範解答を作ろうプロジェクト!
に投稿されている問題に対して, (部分的でもいいから) 模範解答を紙に作成して, スキャンしたもの (後述) をフォーラムに返信してください.

最終的な完璧な答案を投稿した人よりも, 各難関ポイントを解決して貢献した人を評価して点数を決定します. また, 独立に作成した投稿でも, 同じ内容なら, 一番最初に投稿した人のみを評価します. 何人かの貢献で 1 問の最終的な答案が完成したら, 10 点がその人々に分配されます.

多くの人に参加のチャンスがあるように, 問題はときどき追加します. 追加のタイミングは, 原則として水曜日 13:30 ごろです. フォーラムの右側ブロックで, 'このフォーラムをメール購読する' を選択すると, 問題が公開されたときにメールで通知を受けることができます.

---

[1]
`hig@math.ryukoku.ac.jp`, `http://hig3.net`(講義のページもここからたどれます), へや:1 号館 5 階 502.

スキャンは, **自宅にスキャナがあればそれを使ってくれてもいいし**, 3 **号館地下第** 2 **セルフラーニング室や樋口の研究室** 1-502 **でも行えます**. **近々**, **理工学部実習室** 1-612 **で簡単にスキャンができるようになる予定です**.

`http://www.a.math.ryukoku.ac.jp/~hig/info/teaching/scanner.php`

`http://hig3.net`

5　集合の大きさを測ろう—濃度

今日の目標

1. **写像** (**全射**, **単射**, **全単射**) **の復習**
2. **濃度を比べられるようになろう**
3. $\aleph_0$ **と** $\aleph$ **の違いが直観的に比べられるようになろう**

5.1　写像の復習

説明

- $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$:**自然数全体**
- $\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$:**整数全体**
- $\mathbb{Q} = \{\frac{m}{n} | m, n \in \mathbb{R}, n \neq 0\}$:**有理数全体**

5.1.1

次の写像 (?) **を**, (0) **実は写像になってない**, (1) **全射でも単射でもない写像**, (2) **全射だが単射ではない**, (3) **単射だが全射ではない**, (4) **全単射 に分類しよう**.

1. $\mathbb{N} \ni n \mapsto n^2 \in \mathbb{N}$
2. $\mathbb{Z} \ni n \mapsto n^2 \in \mathbb{Z}$
3. $\mathbb{N} \ni n \mapsto n + 3 \in \mathbb{N}$
4. $\mathbb{Z} \ni n \mapsto n + 3 \in \mathbb{Z}$
5. $\mathbb{Z} \ni n \mapsto (n + 3, n - 2) \in \mathbb{Z}^2$
6. $\mathbb{N} \ni n \mapsto 4n \in$ (**正の偶数全体**)
7. $\mathbb{N} \ni n \mapsto 2n \in$ (**正の** 4 **の倍数全体**)
8. $\mathbb{N} \ni n \mapsto 2n \in$ (**正の偶数全体**)

5.1.2

次の写像 (?) **を**, (0) **実は写像になってない**, (1) **全射でも単射でもない写像**, (2) **全射だが単射ではない**, (3) **単射だが全射ではない**, (4) **全単射 に分類しよう**.

1. $\mathbb{N}^2 \ni (n_1, n_2) \mapsto \frac{n_1}{n_2} \in \mathbb{R}$

2. $\mathbb{N}^2 \ni (n_1, n_2) \mapsto \frac{n_1}{n_2} \in \mathbb{Q}$
3. $\mathbb{N} \ni n \mapsto \sqrt{n} \in \mathbb{N}$
4. $\mathbb{N} \ni n \mapsto$ ($\sqrt{n}$ **以下の最大の自然数**) $\in \mathbb{N}$
5. $\mathbb{N} \ni n \mapsto \sqrt{n^2} \in \mathbb{N}$
6. $\mathbb{Z} \ni n \mapsto \sqrt{n^2} \in \mathbb{Z}$
7. $\mathbb{N} \ni n \mapsto$ (n **を** 3 **で割った余り**) $\in \mathbb{N}$
8. $\mathbb{N} \ni n \mapsto m$(**ただし** n **と** m **は** 3 **で割った余りが同じ**) $\in \mathbb{N}$
9. $\{0, 1, 2\} \ni n \mapsto m$(**ただし** n **と** m **は** 3 **で割った余りが同じ**) $\in \{3, 7, 11\}$
10. $\mathbb{N} \ni n \mapsto m$(**ただし** n **と** m **は** 3 **で割った余りが同じ**) $\in \{3, 7, 11\}$
11. 3 **の倍数全体** $\ni n \mapsto m$(**ただし** n **と** m **は** 3 **で割った余りが同じ**) $\in \{0\}$
12. $\mathbb{N} \ni n \mapsto m$(**ただし** n **と** m **は** 3 **で割った余りが同じ**) $\in \{1, 2\}$

5.2　写像の復習 2

再出題です.

説明

写像 $f : X \to Y$ **があるとき**,

- $X_1 \subset X$ **に対して**, $f(X_1) = \{f(x) \in Y | x \in X_1\}$ **を** X_1 **の像という**.
- $Y_1 \subset Y$ **に対して**, $f^{-1}(Y_1) = \{x \in X | f(x) \in Y_1\}$ **を** Y_1 **の逆像という**.

5.2.1

写像 $f : [-2, +2] \to [-4, +4]$ **を考える**. **ただし**, $f(x) = \begin{cases} -x & (-1 \leq x \leq 0) \\ +x & \text{otherwise} \end{cases}$.

f **は全射か単射か考えよう**. **区間** $X_1 = [0, 2], Y_1 = [-4, 0]$ **に対して**, $f(X_1)$, $f^{-1}(f(X_1))$, $f^{-1}(Y_1)$, $f(f^{-1}(Y_1))$ **を求めよう**.

5.3　写像の復習 3

再出題です.

説明

線形写像は写像の中でも特にきれいで扱いやすいやつ.
ベクトル空間 V, W, **線形写像**: $f : V \to W$ **に対して**, f **を表す行列を** M **とする**.

- f **が単射** $\equiv \ker f = \{0\}$.
- f **が全射** $\equiv \mathrm{rank}\ M = \dim W$.
- f **が全単射** $\equiv$ (M **が正方行列**) $\wedge$ $(\det M \neq 0)$.
- $\mathrm{Im}\ f = f(V)$, $\ker\ f = f^{-1}(\{0\})$

5.3.1

次の行列の表す線形写像 $f : V \to W$ **に対して**, **部分空間** $f(V)$, $f^{-1}(\{0\})$ **の次元を求めよう**. **線形写像** f **は全射か**, **単射か**, **全単射か**, **考えよう**.

1. $\begin{pmatrix} +1 & +2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$
2. $\begin{pmatrix} -4 \\ -2 \end{pmatrix}$

5.3.2

次の写像 f **は全射か**, **単射か**, **全単射か**, **考えよう**.

1. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad f(x_1, x_2) = (x_1 + 2x_2, -3x_1 - 4x_2)$.
2. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, \quad f(x_1, x_2, x_3) = (-4x_1 - 2x_2 - x_3, 40x_1 + 20x_2 + 10x_3)$.
3. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^1, \quad f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$.

5.4　ありがちな集合を知ろう

説明

鈴木 p.34

- $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$:**自然数全体**
- $\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$:**整数全体**
- $\mathbb{Q} = \{\frac{m}{n} | m, n \in \mathbb{R}, n \neq 0\}$:**有理数全体**
- $\mathbb{R}$:**実数全体**
- $\mathbb{C} = \{x + \sqrt{-1} \cdot y | x, y \in \mathbb{R}\}$:**複素数全体**
- $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$: **無理数全体**

$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$
$\mathbb{N} = \{1\} \cup$ (**素数全体**) $\cup$ (**合成数全体**) (**直和**)
$2\mathbb{Z} = \{2n | n \in \mathbb{Z}\} =$ (**偶数全体**), $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} | x > 0\} =$ (**正の実数全体**) **などの記号も使われることがある**.

5.4.1

表を完成させよう.

$\subset$	$\mathbb{N}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{C}$
$\sqrt{3}$					
$\sqrt{2}$					
$\sqrt{-1}$					
$\sqrt{2}$					
$\sqrt{-1}$					
π					
$2.999999999999\cdots$					
1.732					
$\frac{1}{3}$					
$27^{1/3}$					

5.5　全単射を作ろう ＝ 濃度が等しいと言おう

説明

有限集合と無限集合ではだいぶ様子が違う
ちょっとびっくりするけど，つぎのペアの間には全単射がある. 鈴木 p.58–61
$\{0,1,2\} \sim \{999,1000,1001\}$.
$\mathbb{N} \sim 2\mathbb{N}$
$\mathbb{N} \sim \mathbb{Z}$
$[0,1] \sim [0,2]$
$(0,1) \sim (0,+\infty)$.
$(0,1) \sim (0,1] \sim [0,1) \sim [0,1]$.
$\mathbb{R} \sim (0,+\infty)$
$\mathbb{Z} \sim \mathbb{Z}^2$.
$\mathbb{R} \sim \mathbb{R}^2$
これの繰り返しで仲間を広げていける.
全単射が存在すれば濃度は等しい.

5.5.1

次の集合の間の全単射を 1 つ作ろう.

1. $A = 3\mathbb{N}, B = \mathbb{N}$.
2. $A = \mathbb{N}, B = \{1, 0.1, 0.01, 0.001, 0.0001, \ldots\}$.

5.5.2

次の集合の間の全単射を 1 つ作ろう.

1. $A = (-1,+1), B = \mathbb{R}$.
2. $A = [0,1], B = [2,9]$.

5.6　濃度の大小を比較しよう

説明

鈴木 p.63 **単射** $f : A \to B$ **が存在** $\equiv \#A \leqq \#B$.
この $\leqq$ **は普通の不等号であるかのような性質を持つ. 特に** $\#A \leqq \#B \wedge \#A \geqq \#B \equiv \#A = \#B$ **という超強力なベルンシュタインの定理が成り立つ.**

5.6.1

次の集合の濃度を求めよう.

1. $\{(\cos\theta, \sin\theta) \in \mathbb{R}^2 | \theta \in \mathbb{R}\}$
2. $\{(\cos\theta, \sin\theta) \in \mathbb{R}^2 | 0 \leq \theta < 2\pi\}$
3. $\{(\cos\frac{7}{3}n\pi, \sin\frac{7}{3}n\pi) \in \mathbb{R}^2 | n \in \mathbb{N}\}$
4. $\{(\cos\frac{7}{3}n\pi, \sin\frac{7}{3}n\pi) \in \mathbb{R}^2 | n \in \mathbb{Z}\}$
5. $\{(\cos\sqrt{2}\,n\pi, \sin\sqrt{2}\,n\pi) \in \mathbb{R}^2 | n \in \mathbb{N}\}$
6. $\{(\cos\sqrt{2}\,n\pi, \sin\sqrt{2}\,n\pi) \in \mathbb{R}^2 | n \in \mathbb{Z}\}$

5.6.2

次の集合を可算濃度の無限集合, 連続濃度の無限集合, 有限集合にわけよう.

1. $\mathbb{Q}$
2. $\mathbb{R}$
3. $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.
4. $\mathbb{N}$
5. $[0, 1]$
6. $(0, 1)$
7. $\{0, 1\}$.
8. $(0, 1) \cup \mathbb{Z}$

5.6.3　チャレンジ問題

1. **平面上の直線全体の集合と, 平面上の点全体の集合の濃度を比較しよう.**
2. **平面上の円の内部の点全体の集合と, 平面上の円全体の集合の濃度を比較しよう.**