

[目次](#) [前回](#) [次回](#) [今回の解答](#)

集合 位相 + 演習

樋口さぶろお¹ 配布: 2007-10-30 Tue 更新: Time-stamp: "2008-01-24 Thu 21:00 JST hig"

プチテストやります

2007-11-06(火)1 講時です (最初にいていたのより 1 週間早い) 持込不可です。

模範解答を作ろうプロジェクト!で最大 20 点ゲット!

集合 位相 + 演習の, 大学院入試の過去問や, プチテスト/ファイナルトライアルの準備に役立つ典型的な問題の模範解答を作ってみんなで共有するプロジェクトです. その貢献に対して 1 問あたり最大 10 点, 1 人あたり最大 20 点の加算があります.

ReLS <https://r-els.media.ryukoku.ac.jp> → [集合 位相 + 演習](#)

→ [模範解答を作ろうプロジェクト!](#)

に投稿されている問題に対して, (部分的でもいいから) 模範解答を紙に作成して, スキャンしたもの (後述) をフォーラムに返信してください.

最終的な完璧な答案を投稿した人よりも, 各難関ポイントを解決して貢献した人を評価して点数を決定します. また, 独立に作成した投稿でも, 同じ内容なら, 一番最初に投稿した人のみを評価します. 何人かの貢献で 1 問の最終的な答案が完成したら, 10 点がその人々に分配されます.

多くの人に参加のチャンスがあるように, 問題はときどき追加します. 追加のタイミングは, 原則として水曜日 13:30 ごろです. フォーラムの右側ブロックで, 'このフォーラムをメール購読する' を選択すると, 問題が公開されたときにメールで通知を受けることができます.

スキャンは, 自宅にスキャナがあればそれを使ってでもいいし, 3号館地下第2セルフラーニング室や樋口の研究室 1-502 でも行えます. 近々, 理工学部実習室 1-612 で簡単にスキャンができるようになる予定です.



<http://hig3.net>

<http://www.a.math.ryukoku.ac.jp/~hig/info/teaching/scanner.php>

¹Copyright ©2007,2008 Saburo HIGUCHI. All rights reserved.

$$\begin{aligned}y &= 2e^{-4x} + 1 \\ \frac{y-1}{2} &= e^{-4x} \\ \log \frac{y-1}{2} &= -4x \\ x &= -\frac{1}{4} \log \frac{y-1}{2}\end{aligned}$$

よって $f^{-1}(y) = -\frac{1}{4} \log \frac{y-1}{2}$.

2007-10-16 quiz の略解

$f: I^2 \ni (x_1, x_2) \mapsto (x_1, 1 - \frac{1}{2}x_2^2) \in \mathbb{R}$ は全射でない。なぜなら $f(x_1, x_2) = (0, \frac{1}{4})$ には解 $(x_1, x_2) \in I^2$ が存在しない。

$f: I^2 \ni (x_1, x_2) \mapsto (x_1, 1 - \frac{1}{2}x_2^2) \in \mathbb{R}$ は単射である。なぜなら, $f(x_1, x_2) = f(x'_1, x'_2)$ すなわち

$$\begin{cases} x_1 = x'_1 \\ 1 - \frac{1}{2}x_2^2 = 1 - \frac{1}{2}(x'_2)^2 \end{cases}$$

を $(x_1, x_2), (x'_1, x'_2) \in I^2$ という条件のもとで解くと $(x_1, x_2) = (x'_1, x'_2)$ となるから。

2007-10-23 quiz の略解

全単射 $(-1, +1) \rightarrow \mathbb{R}$ を表す $y = \frac{x}{1-x^2}$ のグラフを x 軸方向に 2 倍に拡大すると, $y = \frac{\frac{x}{2}}{1-(\frac{x}{2})^2}$. このグラフを x 軸の正の向きに +4 平行移動すると, $y = \frac{\frac{x-4}{2}}{1-(\frac{x-4}{2})^2}$. すなわち

$$f(x) = \frac{\frac{x-4}{2}}{1-(\frac{x-4}{2})^2}.$$

6 プチテストに備えよう

6.1 論理と集合の復習

6.1.1

1. $S_1 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid (x_1^2 + x_2^2 < 1)\}$, $S_2 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid |x_1| < 1 \wedge |x_2| < 1\}$ とする. $S_1 \subset S_2, S_1 \supset S_2, S_1 = S_2$ のうち成り立つものを証明し, 成り立たないものには反例を挙げよう.
2. $S_1 = \{x \in \mathbb{R} \mid \exists y (xy < 0 \wedge y > 0)\}$, $S_2 = \{x \in \mathbb{R} \mid \forall y (xy \leq 0)\}$ とする. $x = 0$ は S_1, S_2 の元か? また, S_1, S_2 を数直線上に図示しよう.

6.2.1

次の写像が全射であるか 単射であるか, 全単射であるかを答えよう.

1. $\mathbb{R} \ni x \mapsto -x^4 \in \mathbb{R}$.
2. $\mathbb{R} \ni x \mapsto e^x \in \mathbb{R}$.
3. $\mathbb{R} \ni x \mapsto e^x \in \{x \in \mathbb{R} | x > 0\}$.
4. $\mathbb{R} \ni x \mapsto e^{-x^2} \in \{x \in \mathbb{R} | x > 0\}$.

6.3 写像の像・逆像の復習

6.3.1

次の写像 $f: X \ni x \mapsto f(x) \in Y$ に対して, $X_1 \subset X$ の像 $f(X_1)$, $Y_1 \subset Y$ の逆像 $f^{-1}(Y_1)$ を求めよう.

1. $\mathbb{Z} \ni n \mapsto n^2 \in \mathbb{Z}$, $X_1 = \{-2, -1, 0, 1\}$, $Y_1 = \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$.
2. $\mathbb{Z} \ni n \mapsto m \in \{1, 2, 3\}$, **ただし n と m は 3 で割ったあまりが等しい.** $X_1 = \{-5, -3, 0, 3, 4\}$, $Y_1 = \{1\}$.
3. $\mathbb{Z} \ni n \mapsto m \in \mathbb{Z}$, **ただし m は n を 3 で割ったあまり.** $X_1 = \{-5, -3, 0, 3, 4\}$, $Y_1 = \{-1, -2, 0, 1\}$.
4. $\mathbb{N} \cup \{0\} \ni n \mapsto 2^n \in \mathbb{Z}$, $X_1 = \{0, 2, 9\}$, $Y_1 = \{-1, 0, 4, 9\}$.

6.4 濃度の復習

6.4.1

集合の各ペアの濃度を比較しよう.

1. $X = \mathbb{R}, Y = (\text{写像 } f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R} \text{ 全体})$
2. $X = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 | x_1^2 + x_2^2 < 1\}, Y = \mathbb{R}^2$.
3. $X = \mathbb{Z}^2, Y = [0, 1] \times [0, 1] \subset \mathbb{R}^2$.

6.4.2 2007-11-06 quiz 2

$P_1(x, y) = (x + y \text{ は } 2 \text{ の倍数}), P_2(x, y) = (x + y \text{ は } 3 \text{ の倍数})$ はそれぞれ同値関係?



目次 前回 次回 今回の解答