

[目次](#) [前回](#) [次回](#) [今回の解答](#)

集合 位相 + 演習

樋口さぶろお¹ 配布: 2007-11-13 Tue 更新: Time-stamp: "2007-11-30 Fri 09:34 JST hig"

8 同値類と基本領域

今日の目標

1. 同値類別のイメージをつかもう.
2. 商集合と基本領域を求められるようになろう.

8.1 同値類

鈴木 p.29 集合 X 上の同値関係 R があるとき, $a \in X$ に対して

$$C(a) = \{x \in X | xRa\}$$

を a の同値類という.

鈴木 定理 1.4(p.29) が成り立つ.

8.2 商集合

鈴木 p.29 集合 X 上の同値関係 R があるとき,

$$\{C(a) \in 2^X | a \in X\}$$

を R による X の商集合といい, X/R とかく.

8.2.1

$X = \{-1, 0, 2, 4, 5, 6\}$ 上の同値関係 $\equiv \pmod{3}$ について, X/R を求めよう.

¹Copyright ©2007,2008 Saburo HIGUCHI. All rights reserved.

集合 X 上の同値関係 R があるとき, 相異なる各同値類 $C(a)$ から 1 個ずつ代表元をとってきて集めた集合を基本領域という.
代表元の取り方が一通りではないので, 基本領域も一通りではない.

8.3.1

$m \in \mathbb{N}$ とする. $X = \mathbb{Z}$ 上の同値関係 $\equiv (\text{mod } m)$ の基本領域をいくつか求めよう. この同値関係の商集合のことを \mathbb{Z}_m と書くことがある.

8.3.2

1. $X = \mathbb{R}$ 上の同値関係 $x_1 R x_2 \equiv (x_1 - x_2 \in \mathbb{Z})$ の基本領域をいくつか求めよう. この同値関係の商集合のことを \mathbb{R}/\mathbb{Z} と書くことがある.
2. $X = \mathbb{R}^2$ 上の同値関係 $(x_1, y_1) R (x_2, y_2) \equiv (x_1 - x_2 \in \mathbb{Z} \wedge y_1 - y_2 \in 2\mathbb{Z})$ の基本領域をいくつか求めよう.
3. $X = \mathbb{R}^2$ 上の同値関係 $(x_1, y_1) R (x_2, y_2) \equiv (\exists a \in \mathbb{R} (a > 0 \wedge (ax_1, ay_1) = (x_2, y_2)))$ の基本領域をいくつか求めよう.
4. $X = \mathbb{R}^2$ 上の同値関係 $(x_1, y_1) R (x_2, y_2) \equiv ((\exists n \in \mathbb{Z} ((\begin{smallmatrix} x_2 \\ y_2 \end{smallmatrix}) = A^n (\begin{smallmatrix} x_1 \\ y_1 \end{smallmatrix}))))$, ただし, $A = \begin{pmatrix} \cos \frac{1}{3}\pi & -\sin \frac{1}{3}\pi \\ \sin \frac{1}{3}\pi & \cos \frac{1}{3}\pi \end{pmatrix}$ の基本領域をいくつか求めよう.
5. $X = \mathbb{R}^2$ 上の同値関係 $(x_1, y_1) R (x_2, y_2) \equiv (\exists n, m \in \mathbb{Z} (x_2, y_2) = (x_1 + n + m, y_1 + 2m))$ の基本領域をいくつか求めよう.

8.3.3

\mathbb{R}^2 と, その一つのエ元 $a = (1, 2) \in V$ を考える (もちろん区間でなくベクトル) V 上の 2 項関係 $v_1 R v_2$ を,

$$v_1 R v_2 \equiv \exists C \in \mathbb{R} (v_1 - v_2 = Ca)$$

と定める.

1. R が同値関係であることを示そう.
2. $0 \in \mathbb{R}^2$ の属する同値類を求めよう.
3. 商集合 \mathbb{R}^2/R の日本語の“~の集合”という呼び方を考えよう.
4. 基本領域をいくつか求めてみよう.

8.3.4

\mathbb{R}^3 と相異なる 2 つの元 $\mathbf{a} = (1, 0, 0)$ と $\mathbf{b} = (0, 0, 1)$ を考える. \mathbb{R}^3 上の 2 項関係 $v_1 R v_2$ を,

$$v_1 R v_2 \equiv \exists C_1, C_2 \in \mathbb{R} \quad (v_1 - v_2 = C_1 \mathbf{a} + C_2 \mathbf{b})$$

と定める.

1. R が同値関係であることを示そう.
2. $0 \in V$ の属する同値類を求めよう.
3. 商集合 \mathbb{R}^2/R の日本語の “ \sim の集合” という呼び方を考えよう.
4. 基本領域をいくつか求めてみよう.

8.3.5

線形空間 (ベクトル空間) V とその部分空間 W を考える ($W \subset V$). V 上の 2 項関係 $v_1 R v_2$ を,

$$v_1 R v_2 \equiv v_1 - v_2 \in W$$

と定める.

1. R が同値関係であることを示そう.
2. $0 \in V$ の属する同値類を求めよう.

8.3.6 2007-11-20quiz2

$X = \mathbb{R}$ 上の順序関係 $x_1 R x_2 \equiv (x_1 \leq x_2)$ を考える. 部分集合 $X_1 = (\sqrt{2}, 3]$ に対して, (存在すれば) 最大元, 最小元, 上界, 下界, 上限, 下限を (1 つ) 求めよう.



目次 前回 次回 今回の解答