集合★位相＋演習

樋口さぶろお[1] **配布**: 2007-11-20 Tue **更新**: Time-stamp: "2007-11-30 Fri 09:34 JST hig"

9 順序関係と最大元最小元上界下界上限下限

今日の目標

1. **順序関係の定義を同値関係と対比してわかろう**
2. **最大元, 最小元, 上界, 下界, 上限, 下限の定義ののりをわかろう**
3. $\mathbb{R}$ **の部分集合に対して最大元, 最小元, 上界, 下界, 上限, 下限を求められるようになろう.**

模範解答を作ろうプロジェクトの近況

模範解答を作ろうプロジェクト!に毎週問題追加を始めました. 追加のタイミングは, 原則として水曜日 13:30 **ごろです (追加されたときにメールを受け取る設定が可能です)**

スキャンが面倒だった人に朗報. 実習室 1-612(10:00–20:00 **に利用可) に, 文書をスキャンして簡単に** PDF **ファイルとして** USB **フラッシュメモリに保存することのできる複合機が導入されました.**

9.1 順序関係

説明

鈴木 p.30

集合 X **の** 2 **項関係** R **が次の** 3 **つを満たすとき,** R **を** $\boxed{\text{順序関係}}$ **という.**

(じか 1) $\forall x \in X \quad (xRx)$. **(反射律)=(どか** 1)

(じか 2) $\forall x_1, x_2 \in X \quad (x_1 R x_2 \wedge x_2 R x_1 \Rightarrow x_1 = x_2)$. $\boxed{\text{(反対称律)}\neq\text{(どか 2)}}$

(じか 3) $\forall x_1, x_2, x_3 \in X \quad (x_1 R x_2 \wedge x_2 R x_3 \Rightarrow x_1 R x_3)$. **(推移律)=(どか** 3)

9.1.1

$Y = \{1, 2, 3\}$, $X = 2^Y$ **とする.** X **上の順序関係** R **を** $x_1 R x_2 \equiv x_1 \subset x_2$ **で定める.**
この順序関係を 2 **つの方法で図解しよう.**

hig@math.ryukoku.ac.jp, http://hig3.net(**講義のページもここからたどれます**), **へや**:1 **号館** 5 **階** 502.

$\{1,2,3\}$								
$\{3,1\}$								
$\{2,3\}$								
$\{1,2\}$								
$\{3\}$								
$\{2\}$								
$\{1\}$								
$\emptyset$								
x_2/x_1	$\emptyset$	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{3\}$	$\{1,2\}$	$\{2,3\}$	$\{3,1\}$	$\{1,2,3\}$

$$\{1,2,3\}$$
$$\nearrow\uparrow\nwarrow$$

$$\nwarrow\uparrow\nearrow$$
$$\emptyset$$

9.1.2

$X=\mathbb{R}^3$ 上の 2 項関係 R について，順序関係であるものはどれか考えよう．順序関係でないものは (じか 1)-(じか 3) のうちどれが成立しないか判定し，反例を作ろう．

1. $(x_1,y_1,z_1)R(x_2,y_2,z_2) \equiv \sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2} \le \sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}.$
2. $(x_1,y_1,z_1)R(x_2,y_2,z_2) \equiv (x_1 \le x_2) \wedge (y_1 \le y_2) \wedge (z_1 \le z_2).$
3. $(x_1,y_1,z_1)R(x_2,y_2,z_2) \equiv \max\{x_1,y_1,z_1\} \le \min\{x_2,y_2,z_2\}.$

9.2　最大元最小元

説明

鈴木 p.31, 鈴木 2.2

R を X 上の順序関係とする．部分集合 $X_1 \subset X$ を考える．$b \in X$ が X_1 の 最大元 (あるいは最小元) であるとは，

- $b \in X_1$
- $\forall x \in X_1 \quad (xRb)$．(あるいは $\forall x \in X_1 \quad (bRx)$)

の両方が成立することである．このとき $b=\max X_1$ (あるいは $\min X_1$) とかく．最大元 (あるいは最小元) は存在しないか，存在するなら 1 個だけである．

9.2.1

1. $X = \mathbb{R}$ 上の大小による順序関係 R を考える. $X_1 = \{x \in \mathbb{R} | \sqrt{2} \leq x < 3\}$ の最大元最小元は存在するか? あれば求めよう.
2. $X = \mathbb{Q}$ 上の大小による順序関係 R を考える. $X_1 = \{x \in \mathbb{Q} | \sqrt{2} \leq x < 3\}$ の最大元最小元は存在するか? あれば求めよう.
3. $X = \mathbb{Z}$ 上の大小による順序関係 R を考える. $X_1 = \{x \in \mathbb{Z} | \sqrt{2} \leq x < 3\}$ の最大元最小元は存在するか? あれば求めよう.

9.2.2

集合 $\mathbb{R}$ 上の順序関係 $R =\leq$ について, 次の部分集合 $X_1 \subset \mathbb{R}$ の最大元, 最小元を (存在すれば) 求めよう.

1. $X_1 = \{1 - \frac{1}{n} \in \mathbb{R} \mid n \in \mathbb{N}\}$
2. $X_1 = \bigcup_{n=1}^{\infty} (-\frac{1}{n}, +\frac{1}{n})$.
3. $X_1 = \bigcap_{n=1}^{\infty} (-\frac{1}{n}, +\frac{1}{n})$.

9.3　上界下界

説明

R を X 上の順序関係とする. 部分集合 $X_1 \subset X$ を考える. $b \in X$ が X_1 の $\boxed{\text{上界}}$ (あるいは下界) であるとは,

- $b \in X$
- $\forall x \in X_1 \quad (xRb)$. (あるいは $\forall x \in X_1 \quad (bRx)$)

の両方が成立することである.

- 上界 (あるいは下界) は存在しないこともある. 存在する場合, 1 個とはかぎらない.
- X_1 に最大元 (あるいは最小元) が存在するならそれは上界 (あるいは下界) のひとつである.

9.3.1

1. $X = \mathbb{R}$ 上の大小による順序関係 R を考える. $X_1 = \{x \in \mathbb{R} | x < 13\}$ に上界下界は存在するか? あればひとつ求めよう.
2. $X = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{2, 3\}, \{3, 1\}\}$ 上の包含関係による順序関係 R を考える. 部分集合 $X_1 = \{\{1\}, \{1, 2\}, \{2, 3\}\}$ に上界下界は存在するか? あればすべて求めよう.

3. $X = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{2,3\}, \{3,1\}\}$ 上の包含関係による順序関係 R を考える. 部分集合 $X_1 = \{\{1,2\}, \{2,3\}\}$ に上界下界は存在するか? あればすべて求めよう.

9.3.2

写像 $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ 全体の集合を F とする. X 上の 2 項関係 $f_1 R f_2 \quad \equiv \quad (\forall x \in \mathbb{R} \quad (f_1(x) \le f_2(x)))$ を考える. 次の部分集合 $F_1 \subset F$ の上界, 下界が存在すればひとつ求めよう.

1. $F_1 = \{x^{-k} \in F \mid 1 < k < 2\}$.
2. $F_1 = \{\mathrm{e}^{-kx} \in F \mid 0 < k < 200\}$.
3. $F_1 = \{x^{-k} \cos(ax) \in F \mid 0 < k < 2, a > 0\}$.

9.4　上限下限

説明

鈴木 p.31　鈴木 2.2

R を X 上の順序関係とする. ここでは R を $\le$ とかく. $x < y \equiv (x \le y \wedge x \ne y)$.
部分集合 $X_1 \subset X$ を考える. X_1 の上界すべてからなる集合の最小元 (あるいは下界すべてからなる集合の最大元) を X_1 の 上限 (あるいは下限) とよび, $\sup X_1$ (あるいは $\inf x_1$) とかく.
上限は存在しないか, 存在するなら 1 個だけである.
b が X_1 の上限 (あるいは下限) であるとは次がすべて成立すること.

- b は X_1 の上界 (あるいは下界)
- $\forall b_2 \in X (b_2$ が上界 $\Rightarrow b \le b_2)$ (あるいは $\forall b_2 \in X (b_2$ が下界 $\Rightarrow b_2 \le b))$

9.4.1

1. $X = \mathbb{R}$ 上の大小による順序関係 R を考える. $X_1 = \{x \in \mathbb{R} | \sqrt{2} \le x < 3\}$ の上限下限は存在するか? あれば求めよう.
2. $X = \mathbb{Q}$ 上の大小による順序関係 R を考える. $X_1 = \{x \in \mathbb{Q} | \sqrt{2} \le x < 3\}$ の上限下限は存在するか? あれば求めよう.
3. $X = \mathbb{Z}$ 上の大小による順序関係 R を考える. $X_1 = \{x \in \mathbb{Z} | \sqrt{2} \le x < 3\}$ の上限下限は存在するか? あれば求めよう.

9.4.2

集合 $\mathbb{R}$ 上の順序関係 $R = \le$ について, 次の部分集合 $X_1 \subset \mathbb{R}$ の上限, 下限を (存在すれば) 求めよう.

1. $X_1 = \{1 - \frac{1}{n} \in \mathbb{R} \mid n \in \mathbb{N}\}$
2. $X_1 = \bigcup_{n=1}^{\infty} (-\frac{1}{n}, +\frac{1}{n})$.
3. $X_1 = \bigcap_{n=1}^{\infty} (-\frac{1}{n}, +\frac{1}{n})$.
4. $X_1 = \bigcup_{n=1}^{\infty} (n - \frac{1}{n}, n+1)$

9.4.3

集合 $X = \{(a,b) \in 2^{\mathbb{R}} \mid a < b, a, b \in \mathbb{R}\} =$ **(実数の有界開区間すべての集合) 上の包含による順序関係** $R = \subset$ **を考える**.

1. **部分集合** $X_1 = \{(-\frac{1}{n}, +\frac{1}{n}) \in X \mid n \in \mathbb{N}\} \subset X$ **の最大元**, **最小元**, **上限**, **下限を (存在すれば) 求めよう**.
2. **部分集合** $X_1 = \{(-n, \frac{1}{n}) \in X \mid n \in \mathbb{N}\} \subset X$ **の最大元**, **最小元**, **上限**, **下限を (存在すれば) 求めよう**.
3. **部分集合** $X_1 = \{(-2,-1), (1,2)\} \subset X$ **の最大元**, **最小元**, **上限**, **下限を (存在すれば) 求めよう**.

9.5　$\mathbb{R}$ の大小関係

$\leq$ **を** $\mathbb{R}$ **上の通常の大小による順序関係とする**. **部分集合** $X_1 \subset \mathbb{R}$ **を考える**.

- X_1 **が上に (あるいは下に) 有界なとき**, X_1 **には上限 (あるいは下限) が存在する**.
- **上限 (あるいは下限)** b **が存在するとき**, $b \in X_1$ **なら** b **が** X_1 **の最大元 (あるいは最小元) であり**, $b \notin X_1$ **なら** X_1 **の最大元 (あるいは最小元) は存在しない**.
- b **が** X_1 **の上限であるとは**,
  - $b \in \mathbb{R}$
  - $\forall x \in X_1 \quad (x \leq b)$
  - $\forall \epsilon > 0 \quad \exists x \in X_1 \quad (b - \epsilon \leq x)$.

  のすべてが成立することとおなじである (下限についても同様)