集合★位相＋演習

樋口さぶろお[1] **配布**: 2007-11-27 Tue **更新**: Time-stamp: "2007-11-30 Fri 10:05 JST hig"

10　ユークリッド空間と内点・内部・開集合

今日の目標

1. **ユークリッド距離と三角不等式を使えるようになろう**
2. **ある集合の点が内点であるかどうか判定できるようになろう**
3. **ある集合の内部 (それって集合) が求められるようになろう**
4. **ある集合が開集合であるかどうか判定できるようになろう**

10.1　ユークリッド空間

説明

鈴木 3.1(p.71) $\mathbb{R}^n$ **の点を** $x_1 = (x_1^{(1)}, x_1^{(2)}, \dots, x_1^{(n)}), x_2 = (x_2^{(1)}, x_2^{(2)}, \dots, x_2^{(n)})$ **のように書く**.

x_1 **と** x_2 **の間の** **ユークリッド距離** $d(x_1, x_2) = \left[(x_1^{(1)} - x_2^{(1)})^2 + \cdots + (x_1^{(n)} - x_2^{(n)})^2\right]^{1/2}$.

$\mathbb{R}^n$ **と** d **の組を** n **次元ユークリッド空間** **という** $\neq$ **地球の表面上の道のり (リーマン空間), ロバチェフスキー空間 (これらは非ユークリッド幾何に分類される)**

ユークリッド距離の性質

(きょ1) $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n \quad d(x_1, x_2) \geq 0$. **等号** $\Leftrightarrow x_1 = x_2$.

(きょ2) $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n \quad (d(x_1, x_2) = d(x_2, x_1))$

(きょ3) $\forall x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}^n \quad d(x_1, x_3) \leq d(x_1, x_2) + d(x_2, x_3)$ **三角不等式**

(きょ3') $\forall x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}^n \quad |d(x_1, x_2) - d(x_1, x_3)| \leq d(x_2, x_3)$ **三角不等式**

10.2　内点

説明

鈴木 p.83 **ユークリッド空間の点** $a \in \mathbb{R}^n, \epsilon \in \mathbb{R}, \epsilon > 0$ **に対して**,

$N(a; \epsilon) = \{x \in \mathbb{R} \mid d(x, a) < \epsilon\}$

を a **を中心とする半径** ϵ **の** **開球** **という**.

---

hig@math.ryukoku.ac.jp, http://hig3.net(講義のページもここからたどれます), へや:1 号館 5 階 502.

鈴木 p.88 **ユークリッド空間の部分集合 $A \subset \mathbb{R}^n$ に対して,**

$x \in A$ **が** A **の** $\boxed{\text{内点}}$ **である** $\quad \equiv \quad \exists \epsilon > 0 \quad (N(x;\epsilon) \subset A).$

10.2.1

ユークリッド空間 $\mathbb{R}^1$ **を考える.** $A = [-1, 1) \subset \mathbb{R}^1$ **について, 次のうち** A **の内点はどれか. またそれを示すには** ϵ **をどう選べばよいか.**

(1) -1　(2) $+1$　(3) 0.5　(4) $-1 < x < 1$ **を満たす** $x \in \mathbb{R}$

10.2.2

ユークリッド空間 $\mathbb{R}^2$ **を考える. 原点を** O **とする.** $A = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid d(x, O) < 2\} \subset \mathbb{R}^2$ **について, 次のうち** A **の内点はどれか. またそれを示すには** ϵ **をどう選べばよいか.**

1. $(0, -2)$
2. $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$
3. O
4. $(1, \frac{1}{2})$
5. $d(x, O) < 2$ **を満たす点** x

10.3　内部

鈴木 p.88 **ユークリッド空間の部分集合 $A \subset \mathbb{R}^n$ に対して,**

$$
\begin{aligned}
\boxed{A^{\mathrm{i}}} &= \{x \in A \mid x \text{ は } A \text{ の内点 }\} \\
&= \{x \in A \mid \exists \epsilon > 0 \quad (N(x;\epsilon) \subset A)\}
\end{aligned}
$$

を A **の** $\boxed{\text{内部}}$(interior) **という.**

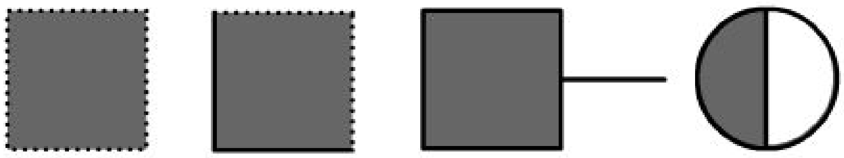
10.3.1

ユークリッド空間 $\mathbb{R}^1$ **で次の集合** A **に対して** A^{i} **を求めよう.**

(1) $A = [0, 1)$　(2) $A = (0, \infty)$　(3) $A = \{0\}$.　(4) $A = [0, 1] \cup (2, 3)$.
(5) $A = \{x^2 \mid |x| < \frac{1}{2}\}$.

10.3.2

次の $\mathbb{R}^2$ **の部分集合** A **それぞれの内部** A^{i} **を描こう**.



10.3.3

ユークリッド空間 $\mathbb{R}^2$ **で次の集合** A **に対して** A^{i} **を求めよう**. **なお**, $x = (x^{(1)}, x^{(2)}) \in \mathbb{R}^2$, **原点を** $O \in \mathbb{R}^2$ **のように書く**.

1. $A = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid d(x, O) \leq 1\}$.
2. $A = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x^{(1)} < 1 \wedge 0 \leq x^{(2)} \leq 1\}$.
3. $A = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x^{(1)} < 1 \wedge x^{(2)} = 1\}$
4. $A = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid d(x, O) > 1\}$.

10.4　開集合

説明

鈴木 p.83 **ユークリッド空間の部分集合** $A \in \mathbb{R}^n$ **に対して**,

$$
\begin{aligned}
A \text{ が } \boxed{\text{開集合}} \quad &\equiv \quad A^{\mathrm{i}} = A \\
&\equiv \quad \forall x \in A \quad (x \text{ は } A \text{ の内点}) \\
&\equiv \quad \forall x \in A \; \exists \epsilon > 0 \quad (N(x; \epsilon) \subset A)
\end{aligned}
$$

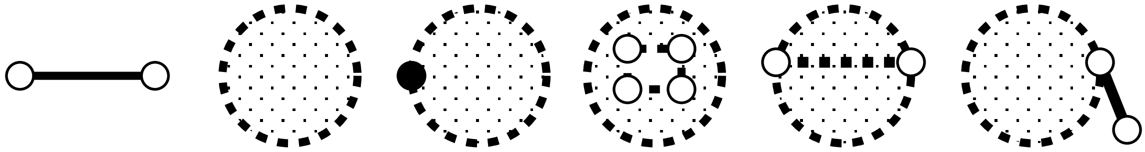
10.4.1

ユークリッド空間 $\mathbb{R}^1$ **で次の集合は開集合か**?

1. $(-\infty, +2)$
2. $[1, 2]$
3. $[1, 2)$
4. $(1, 2)$
5. $\mathbb{R} \setminus \{0\}$
6. $(1, 2) \cup (3, 4)$
7. $\{0\}$
8. $\{0\} \cup (1, 2)$
9. $\{\cos x \mid 0 < x < 4\}$.
10. $\mathbb{Z}$
11. $\mathbb{Q}$

10.4.2

ユークリッド空間 $\mathbb{R}^2$ **で次の集合は開集合か**?



10.5　開集合の性質

説明

鈴木 定理 3.2(p.85)

(かし 1) $\mathbb{R}^n$, $\emptyset$ **は開集合**.
(かし 2) $U_1, U_2, \ldots, U_m \subset \mathbb{R}^n$ **が開集合** $\Rightarrow U_1 \cap U_2 \cap \cdots \cap U_m$ **は開集合**.
(かし 3) $U_1, U_2, \ldots, U_m \subset \mathbb{R}^n$ **が開集合** $\Rightarrow U_1 \cup U_2 \cup \cdots \cup U_m$ **は開集合**.
(かし 3') **部分集合のファミリー** $U_\lambda \subset \mathbb{R}^n (\lambda \in \Lambda)$ **がすべて開集合** $\Rightarrow \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$ **は開集合**.

(**かし** 3') **は**, (**かし** 3) **で** $k \to \infty$ **としてもいい**, **と言っている**.
一方, (**かし** 2) **で** $m \to \infty$ **とした** (**かし** 2') **は成立しない** (**反例**?)

10.5.1

ユークリッド空間 $\mathbb{R}^1$ **で次の集合** A **は開集合か**? **また集合** A **を具体的に求めよう**.

1. $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} (-1 + \frac{1}{n}, +1 - \frac{1}{n})$.
2. $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} (-1 - \frac{1}{n}, +1 + \frac{1}{n})$.