集合★位相+演習

樋口さぶろお[1]　配布: 2007-12-04 Tue 更新: Time-stamp: "2007-12-14 Fri 11:14 JST hig"

11　内部・外部・境界

今日の目標

1. ある集合が閉集合であるかどうか判定できるようになろう
2. $\mathbb{R}$ の中に $\mathbb{Q}$ がはいっている様子を語れるようになろう
3. 集合の内部・外部・境界が求められるようになろう

模範解答を作ろうプロジェクトの近況

模範解答を作ろうプロジェクト!に毎週問題追加を始めました. 追加のタイミングは, 原則として水曜日です (追加されたときにメールを受け取る設定が可能です)

スキャンが面倒だった人に朗報. 実習室 1-612(10:00–20:00 に利用可) に, 文書をスキャンして簡単に PDF ファイルとして USB フラッシュメモリに保存することのできる複合機が導入されました.

11.1　閉集合

説明

鈴木 p.14 差集合 $A \setminus B = \{x \in A \mid x \notin B\}$.　$(A - B)$ と書くこともある.

鈴木 p.12 補集合 (complement) $A^{\mathrm{c}} =$ (全体) $\setminus A$ を A の補集合という.

ユークリッド空間の部分集合 $A \subset \mathbb{R}^n$ について, $A^{\mathrm{c}} = \mathbb{R}^n \setminus A = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x \notin A\}$.

鈴木 p.86 A をユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ の部分集合とする.

$$A \text{ が} \boxed{\text{閉集合}} \quad \equiv \quad A^{\mathrm{c}} \text{ が開集合}$$

つまり開集合の補集合は閉集合. また, $(A^{\mathrm{c}})^{\mathrm{c}} = A$ なので, 閉集合の補集合は開集合.

---

hig@math.ryukoku.ac.jp, http://hig3.net(講義のページもここからたどれます), へや:1 号館 5 階 502.

11.1.1

ユークリッド空間 $\mathbb{R}^1$ **で次の部分集合は開集合かどうか考えよう**. **閉集合かどうか考えよう**.

1. $[1,2]$
2. $(1,2)$
3. $(-\infty,+2)$
4. $(-\infty,+2]$
5. $[1,2)$
6. $\mathbb{R}\setminus\{0\}$
7. $(1,2)\cup(3,4)$
8. $[1,2]\cup[3,4]$

11.1.2

ユークリッド空間 $\mathbb{R}^1$ **で次の部分集合は開集合かどうか考えよう**. **閉集合かどうか考えよう**.

1. $\{0\}$
2. $\{0\}\cup(1,2)$
3. $[1,2]\cup(3,4)$
4. $\{\cos x \mid 0<x<4\}$.
5. $\mathbb{Z}$
6. $\mathbb{R}\setminus\{\frac{1}{n}\mid n\in\mathbb{N}\}$.
7. $\mathbb{R}\setminus(\{0\}\cup\{\frac{1}{n}\mid n\in\mathbb{N}\})$.
8. $\mathbb{R}$.

11.2　有理数・無理数・実数の微妙な性質

説明

- **無理数全体** $=\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$.
- (**実数全体** $\mathbb{R}$) $=$ (**有理数全体** $\mathbb{Q}$) $\cup$ (**無理数全体**).　(**共通部分なし**)
- **濃度は** $\#\mathbb{R}=\aleph$, $\#\mathbb{Q}=\aleph_0$, $\#(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})=\aleph$.
- **上のような**, A,B **に共通部分がないとき** ($A\cap B=\emptyset$ **のとき**), **和集合** $A\cup B$ **を** $A\sqcup B$ **と書くことがある**.

$\leq$ **を** $\mathbb{R}$ **上の通常の大小による順序関係とする**. **部分集合** $X_1\subset\mathbb{R}$ **を考える**.

- X_1 **が上に** (**あるいは下に**) **有界なとき**, X_1 **には上限** (**あるいは下限**) **が存在する**. ($\boxed{\text{実数の連続性}}$, $\boxed{\text{実数の完備性}}$). **最小元**, **最大元は存在するとはかぎらない**.
- **上限** (**あるいは下限**) b **が存在するとき**, $b\in X_1$ **なら** b **が** X_1 **の最大元** (**あるいは最小元**) **であり**, $b\notin X_1$ **なら** X_1 **の最大元** (**あるいは最小元**) **は存在しない**.
- b **が** X_1 **の上限であるとは**,
  - $b\in\mathbb{R}$
  - $\forall x\in X_1 \quad (x\leq b)$
  - $\forall\epsilon>0 \quad \exists x\in X_1 \quad (b-\epsilon\leq x)$.

  のすべてが成立することとおなじである (**下限についても同様**)

- 有理数全体の集合 $X = \mathbb{Q}$ では, 有界な部分集合 X_1 に上限, 下限がないことがある. 例. $X_1 = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 < 2\}$
- $\mathbb{R}$ のどのような (空でない) 開部分集合をとっても, その中に有理数と無理数が存在する ($\boxed{\text{有理数の稠密性}}$, 無理数の稠密性)

11.2.1

1. $X = \mathbb{R}$ 上の順序関係 $\leq$ を考える. $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x < \pi\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq \pi\}$ とすると, $\mathbb{R} = A \sqcup B$ である. A, B の最大元, 最小元, 上限, 下限を (存在すれば) 求めよう.
2. $X = \mathbb{Z}$ 上の順序関係 $\leq$ を考える. $C = \{x \in \mathbb{Z} \mid x < \pi\}$, $D = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \geq \pi\}$ とすると, $\mathbb{Z} = C \sqcup D$ である. C, D の最大元, 最小元, 上限, 下限を (存在すれば) 求めよう.
3. $X = \mathbb{Q}$ 上の順序関係 $\leq$ を考える. $E = \{x \in \mathbb{Q} \mid x < \pi\}$, $F = \{x \in \mathbb{Q} \mid x \geq \pi\}$ とすると, $\mathbb{Q} = E \sqcup F$ である. E, F の最大元, 最小元, 上限, 下限を (存在すれば) 求めよう.

とする.

11.2.2

1 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^1$ で, 有理数全体 $\mathbb{Q}$, 無理数全体 $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ はそれぞれ開集合か, 閉集合か考えよう.

11.2.3

1 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^1$ で, 有限小数で表現できる数全体 A, 有限小数で表現できない数全体 $\mathbb{R} \setminus A$, はそれぞれ開集合か, 閉集合か考えよう.

11.3　外点・境界点

鈴木 p.88 **ユークリッド空間の部分集合** $A \subset \mathbb{R}^n$ **に対して,**

$x \in \mathbb{R}^n$ **が** A **の** $\boxed{\textbf{内点}}$ **である** $\equiv$ $\exists \epsilon > 0 \quad (N(x;\epsilon) \subset A)$.

$x \in \mathbb{R}^n$ **が** A **の** $\boxed{\textbf{外点}}$ **である** $\equiv$ $\exists \epsilon > 0 \quad (N(x;\epsilon) \subset A^{\mathrm{c}})$.

$x \in \mathbb{R}^n$ **が** A **の** $\boxed{\textbf{境界点}}$ **である** $\equiv$ $\forall \epsilon > 0 \quad (N(x;\epsilon) \cap A \neq \emptyset \wedge N(x;\epsilon) \cap A^{\mathrm{c}} \neq \emptyset)$.

任意の点 $x \in \mathbb{R}^n$ **は** A **の内点, 外点, 境界点 のいずれかである.**

11.3.1

1 **次元ユークリッド空間** $\mathbb{R}^1$ **の集合** $[-1, 1)$ **を考える. 次の点** x **は, 次の集合** A **の内点, 外点, 境界点のどれ? 内点または外点の場合,** ϵ **をどうとれば証明できる?**

1. $x = -1$
2. $x = 0$
3. $x = +1$
4. $x = +\frac{1}{2}$
5. $x = +102$
6. $|x| < 1$ **である** x.
7. $|x| > 1$ **である** x.

11.3.2

2 **次元ユークリッド空間** $\mathbb{R}^2$ **の集合** $A = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid d(x, O) \leq 2\}$ **を考える. ここで** $O \in \mathbb{R}^2$ **は原点.**

次の点 x **は, 次の集合** A **の内点, 外点, 境界点のどれ? 内点または外点の場合,** ϵ **をどうとれば証明できる?**

1. $x = (\sqrt{2}, -\sqrt{2})$
2. $x = (0, 0)$
3. $x = (\frac{1}{2}, 0)$
4. $x = (0, -3)$
5. x **ただし** $d(x, O) < 2$.
6. x **ただし** $d(x, O) = 2$.
7. x **ただし** $d(x, O) > 2$.

11.4　外部・境界

ユークリッド空間の部分集合 $A \subset \mathbb{R}^n$ に対して,

- A の $\boxed{\text{内部 (interior)}}$ $A^{\mathrm{i}} = (A$ の内点すべてからなる集合$)$ 開核ともいう
- A の $\boxed{\text{外部 (exterior)}}$ $A^{\mathrm{e}} = (A$ の外点すべてからなる集合$)$
- A の $\boxed{\text{境界 (frontier)}}$ $A^{\mathrm{f}} = (A$ の境界点すべてからなる集合$)$
- A の $\boxed{\text{閉包 (closure)}}$ $A^{\mathrm{a}} = A^{\mathrm{i}} \cup A^{\mathrm{f}}$

$\mathbb{R}^n = A^{\mathrm{i}} \cup A^{\mathrm{e}} \cup A^{\mathrm{f}}$ (共通部分なし)
$A^{\mathrm{e}} = (A^{\mathrm{c}})^{\mathrm{e}}$.

- 内部 (開核) は開集合. より正確には, A に含まれる最大の開集合.
- $X = 2^{\mathbb{R}^n}$ 上の包含による順序関係 $R = \subset$ を考えたとき, $X_1 = \{U \in X | U \subset A, U$ は開集合$\}$ の最大元が A^{i}.
- 閉包は閉集合. より正確には, A を含む最小の閉集合.
- $X = 2^{\mathbb{R}^n}$ 上の包含による順序関係 $R = \subset$ を考えたとき, $X_2 = \{F \in X | A \subset F, F$ は閉集合$\}$ の最小元が A^{a}.

11.4.1

ユークリッド空間 $\mathbb{R}^1$ の部分集合 $A = [0, 1) \cup \{2\}$ に対して A^{i},A^{e},A^{f},A^{a} を求めよう.

11.4.2

ユークリッド空間 $\mathbb{R}^1$ で次の集合 A に対して A^{i},A^{e},A^{f},A^{a} を求めよう.

(1) $A = (0, \infty)$　(2) $A = \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$.　(3) $A = \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$

解説　$\boxed{\text{実数}}$と$\boxed{\text{実数の集合}}$を混同した解答をよく見かけました. 気をつけましょう.
例えば, 実数の集合を答えるところで, $\{\mathbb{R}\}, \{\mathbb{N}\}, \{\emptyset\}$ など. $\mathbb{R}, \mathbb{N}, \emptyset$ などはそれだけで集合を表す記号ですから, さらに $\{\}$ にいれるのは変です.

また, $\{\mathbb{R} - \frac{1}{n}\}$ という答えも見かけました. $\mathbb{R}$ は集合, $\frac{1}{n}$ は実数ですから, その間で演算をすることはできません. たぶん $\mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$ を意図した答案でしょう. これなら第 2 項が集合になりますから, $\mathbb{R}$ との間で差集合をとることが可能になります.

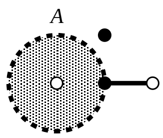
$\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\} = (0, 1)$ と思ってる答案も時々見かけました. 左辺はとびとびの集合なので, べたっとある右辺とは違います (濃度で言うと左辺は $\aleph_0$, 右辺は $\aleph$ です).

また, $+\infty, -\infty$ は数ではなく, $\mathbb{N}, \mathbb{R}$ などの元ではなく, 等式, 不等式にも参加しません. 区間 $(0, 1) = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 1\}$ ですが, $(0, \infty)$ は $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x\}$ の略記にすぎません. したがって, $\mathbb{R} \setminus (0, \infty) = (-\infty, 0]$ であり, $+\infty \notin (\mathbb{R} \setminus (0, \infty))$ です.

3. では $0 \in A^{\mathrm{f}}$ だというところがいちばんのポイントです. 自分は A の元じゃないけど, どんなに小さい ϵ に対しても $N(x; \epsilon)$ は A の元を含むからなあ (例 $1/([2/\epsilon])$. ここで $[x]$ は x の整数部分).

11.4.3

ユークリッド空間 $\mathbb{R}^2$ の次の部分集合 A の A^{i}, A^{e}, A^{f}, A^{a} を描こう.



11.4.4

1 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^1$ で, 有理数全体 $\mathbb{Q}$, 無理数全体 $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ の内部, 外部, 境界, 閉包を求めよう.