集合★位相＋演習

樋口さぶろお[1] 配布: 2007-12-11 Tue 更新: Time-stamp: "2007-12-14 Fri 11:09 JST hig"

12 開集合であることの証明

今日の目標

1. 開集合・閉集合・内部・閉包にもっと直観がはたらくようになろう.
2. 集合が開集合であることを証明できるようになろう

12.1 開集合・開集合の性質

説明

鈴木 定理 3.2(p.85)

(かし 1) $\mathbb{R}^n$, $\emptyset$ は開集合.
(かし 2) $U_1, U_2, \ldots, U_m \subset \mathbb{R}^n$ が開集合 $\Rightarrow U_1 \cap U_2 \cap \cdots \cap U_m$ は開集合.
(かし 3) $U_1, U_2, \ldots, U_m \subset \mathbb{R}^n$ が開集合 $\Rightarrow U_1 \cup U_2 \cup \cdots \cup U_m$ は開集合.
(かし 3') 部分集合のファミリー $U_\lambda \subset \mathbb{R}^n (\lambda \in \Lambda)$ がすべて開集合 $\Rightarrow \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$ は開集合.

(かし 3') は, (かし 3) で $m \to \infty$ としてもいい, と言っている.
一方, (かし 2) で $m \to \infty$ とした (かし 2') は成立しない (反例?)

鈴木 定理 3.3(p.86)

(へし 1) $\mathbb{R}^n$, $\emptyset$ は閉集合.
(へし 2) $F_1, F_2, \ldots, F_m \subset \mathbb{R}^n$ が閉集合 $\Rightarrow F_1 \cap F_2 \cap \cdots \cap F_m$ は閉集合.
(へし 3) $F_1, F_2, \ldots, F_m \subset \mathbb{R}^n$ が閉集合 $\Rightarrow F_1 \cup F_2 \cup \cdots \cup F_m$ は閉集合.
(へし 2') 部分集合のファミリー $F_\lambda \subset \mathbb{R}^n (\lambda \in \Lambda)$ がすべて閉集合 $\Rightarrow \bigcap_{\lambda \in \Lambda} F_\lambda$ は閉集合.

(へし 2') は, (へし 2) で $m \to \infty$ としてもいい, と言っている.
一方, (へし 3) で $m \to \infty$ とした (へし 3') は成立しない (反例?)

hig@math.ryukoku.ac.jp, http://hig3.net(講義のページもここからたどれます), へや:1 号館 5 階 502.

開集合とも閉集合とも限らない集合 $A \subset \mathbb{R}^n$ **に対して,**

- 鈴木 定理 3.4(p.89) A **の内部 (開核)** A^{i} **は開集合. より正確には,** A **に含まれる (包含による順序関係で) 最大の開集合すなわち**

$$A^{\mathrm{i}} = \bigcup_{U_\lambda \in \mathcal{U}} U_\lambda$$

ただし $\mathcal{U} = \{U_\lambda \subset \mathbb{R}^n \mid U_\lambda \text{は開集合}, U_\lambda \subset A\}$. **つまり,** A^{i} **は** A **に包含される開集合すべての和集合.**

- 鈴木 定理 3.7(p.92) A **の閉包** A^{a} **は閉集合. より正確には,** A **を含む (包含による順序関係で) 最小の閉集合すなわち**

$$A^{\mathrm{a}} = \bigcap_{F_\lambda \in \mathcal{F}} F_\lambda$$

ただし $\mathcal{F} = \{F_\lambda \subset \mathbb{R}^n \mid F_\lambda \text{は閉集合}, F_\lambda \supset A\}$. **つまり,** A^{a} **は** A **を包含する閉集合すべての共通部分.**

12.1.1

ユークリッド空間 $\mathbb{R}^2$ **の次の部分集合** A **を描こう. 集合** A **の内部, 外部, 境界, 閉包を描こう.**

1. $A = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid d(x, O) < 2 \wedge x^{(2)} \neq 0\} \cup \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x^{(1)} = 0\}$.
2. $A = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid d(x, O) < 2 \wedge \neg(x^{(2)} \neq 0 \wedge x^{(1)} > 0)\}$.

12.1.2

ユークリッド空間 $\mathbb{R}^1$ **で次の集合** A **を具体的に求めよう. 集合** A **は開集合か? 閉集合か?**

1. $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} (-1 + \frac{1}{n}, +1 - \frac{1}{n})$.
2. $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} (-1 - \frac{1}{n}, +1 + \frac{1}{n})$.

12.1.3

ユークリッド空間 $\mathbb{R}^1$ **で次の集合** A **を具体的に求めよう. 集合** A **は閉集合か? 開集合か?**

1. $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} [-1 + \frac{1}{n}, +1 - \frac{1}{n}]$.

2. $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} [-1 - \frac{1}{n}, +1 + \frac{1}{n}]$.

12.2　開集合であることの証明

説明

鈴木 例題 3.2,3.3, **問題** 3.7-3.10(p.83-85)

(きょ3) $\forall x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}^n \quad d(x_1, x_3) \leq d(x_1, x_2) + d(x_2, x_3)$　**三角不等式**

(きょ3') $\forall x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}^n \quad |d(x_1, x_2) - d(x_1, x_3)| \leq d(x_2, x_3)$　**三角不等式**

12.2.1

ユークリッド空間 $\mathbb{R}^2$ **の部分集合** $A = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid d(x, O) < 2\}$ **が開集合であることを証明しよう**.

12.2.2

ユークリッド空間 $\mathbb{R}^2$ **の部分集合** $A = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid d(x, O) \leq 2\}$ **が閉集合であることを証明しよう**.

12.2.3

ユークリッド空間 $\mathbb{R}^2$ **の部分集合** $A = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x^{(1)} < 2\}$ **が開集合であることを証明しよう**.

12.2.4

ユークリッド空間 $\mathbb{R}^2$ **の部分集合** $A = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x^{(1)} \times x^{(2)} > 0\}$ **が開集合であることを証明しよう**.

12.2.5　Quiz

ユークリッド空間 $\mathbb{R}^2$ **の部分集合** $B = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x^{(2)} \leq 2\}$ **が閉集合であることを証明しよう**.

補講のお知らせ

1 **講時分の補講が発表される予定ですが**, **これは新たな事項を学ぶための時間ではありません**.

この時間帯は空けておいていただきたいのですが, (**場合によっては自由参加で**) **質問受付や**, **問題演習や**, **ファイナルトライアルリハーサルや**, **プチテストリベンジなどを行うことを計画しています**.

模範解答を作ろうプロジェクトの近況

模範解答を作ろうプロジェクト!**に毎週問題追加を始めました**. **追加のタイミングは**, **原則として水曜日** 13:30 **ごろです** (**追加されたときにメールを受け取る設定が可能です**)

スキャンが面倒だった人に朗報. **実習室** 1-612(10:00–20:00 **に利用可**) **に**, **文書をスキャンして簡単に** PDF **ファイルとして** USB **フラッシュメモリに保存することのできる複合機が導入されました**.

目次 | 前回 | 次回 | 今回の解答