集合★位相＋演習

樋口さぶろお[1] 配布: 2007-12-18 Tue 更新: Time-stamp: "2008-01-23 Wed 08:55 JST hig"

13 写像の連続性

今日の目標

1. 写像の (不) 連続の定義を納得しよう
2. 写像が連続かどうか直観的に判定できるようになろう
3. 写像の (不) 連続の定義に出てくる ϵ, δ を具体的に決められるようになろう.
4. 連続写像と開集合の関係を納得しよう

13.1 連続写像の定義

説明

鈴木 p.95

$X \subset \mathbb{R}^n$ を定義域とする写像 $f : X \to \mathbb{R}^m$ が, 点 $a \in X$ において連続であるとは

$$\forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in X\ (d(x, a) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(a)) < \epsilon)$$

のことをいう.
別の言い方をすると,

$$\forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in X\ (x \in N(a; \delta) \Rightarrow f(x) \in N(f(a); \epsilon)),$$

もっと別の言い方をすると,

$$\forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0\ (f(N(a; \delta)) \subset N(f(a); \epsilon)).$$

$n = m = 1$, つまり普通の 1 変数関数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ については,

$$\forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in X\ (|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \epsilon)$$

と書く. この手の書き方や, これを証明する方法を $\boxed{\epsilon\text{-}\delta \text{ 論法}}$ などという.
X のすべての点 $a \in X$ において f が連続であるとき, f は X で連続であるという (定義の前に $\forall a \in X$ を追加すればいい)

hig@math.ryukoku.ac.jp, http://hig3.net(講義のページもここからたどれます), へや:1 号館 5 階 502.

連続であることの証明: ϵ **で攻撃されたときに**, **反撃** (**条件を満たす充分小さい**) δ **を** ϵ **の関数として作ればいい**.
連続でないことの証明: **反撃** δ **が作れないくらい強力な攻撃** (**小さい**) ϵ **を作って見せればいい**.

13.1.1

1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 2x + 1$ **が点** $x = 0$ **で連続であることを証明するには**, ϵ **に対して** δ **をどうとればいいか**.
2. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 2x & (x < \frac{3}{4}) \\ x + \frac{3}{4} & (\frac{3}{4} \leq x) \end{cases}$ **が点** $x = \frac{3}{4}$ **で連続であることを証明するには**, ϵ **に対して** δ **をどうとればいいか**.
3. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = -3x + 1$ **が点** $x = 0$ **で連続であることを証明するには**, ϵ **に対して** δ **をどうとればいいか**.
4. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 2x + 1 & (x \leq 0) \\ 2x - 1 & (x > 0) \end{cases}$ **が点** $x = 0$ **で不連続であることを証明するには**, **どのような** ϵ **をもってくればいいか**.

13.1.2

次の写像 $f : I^2 \to \mathbb{R}^2$ **について**, **値域** $f(I^2)$ **を描こう**. **写像** f **は** $(\frac{3}{4}, \frac{1}{2})$ **において連続か考えよう**. **連続なら** ϵ **に対して** δ **を** ϵ **で表そう**. **不連続なら**, δ **を作れない** ϵ **の例を挙げよう**.

1. $f(x^{(1)}, x^{(2)}) = \begin{cases} (2x^{(1)}, x^{(2)}) & (0 \leq x^{(1)} < \frac{3}{4}) \\ (3x^{(1)} - \frac{9}{4}, x^{(2)}) & (\frac{3}{4} \leq x^{(1)} \leq 1) \end{cases}$
2. $f(x^{(1)}, x^{(2)}) = \begin{cases} (2x^{(1)}, x^{(2)}) & (0 \leq x^{(1)} < \frac{3}{4}) \\ (x^{(1)} + \frac{3}{4}, x^{(2)}) & (\frac{3}{4} \leq x^{(1)} \leq 1) \end{cases}$
3. $f(x^{(1)}, x^{(2)}) = \begin{cases} (2x^{(1)}, x^{(2)}) & (0 \leq x^{(1)} < \frac{3}{4}) \\ (2x^{(1)} + 1, x^{(2)}) & (\frac{3}{4} \leq x^{(1)} \leq 1) \end{cases}$
4. $f(x^{(1)}, x^{(2)}) = \begin{cases} (x^{(1)}, x^{(2)}) & (0 \leq x^{(1)} < \frac{3}{4}) \\ (\frac{3}{2} - x^{(1)}, x^{(2)}) & (\frac{3}{4} \leq x^{(1)} \leq 1) \end{cases}$

13.1.3

$X = \{(r\cos\theta, r\sin\theta) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < r < 1, -\pi \leq \theta < +\pi\}$ **とする**. **次の写像** $f : X \to \mathbb{R}^2$ **について**, **値域** $f(X)$ **を描こう**. **写像** f **は** $(x^{(1)}, x^{(2)}) = (-\frac{1}{2}, 0)$ **において連続か不連続か考えよう**.

なお, **以下では** $x^{(1)} = r\cos\theta, x^{(2)} = r\sin\theta$ $(0 \leq r, -\pi \leq \theta < +\pi)$. **とする**.

1. $f(x^{(1)}, x^{(2)}) = (2r\cos\theta, 2r\sin\theta)$
2. $f(x^{(1)}, x^{(2)}) = (r\cos\frac{1}{2}\theta, r\sin\frac{1}{2}\theta)$
3. $f(x^{(1)}, x^{(2)}) = (r\cos 3\theta, r\sin 3\theta)$
4. $f(x^{(1)}, x^{(2)}) = (r\cos\frac{7}{2}\theta, r\sin\frac{7}{2}\theta)$

13.2　連続写像と像, 逆像

説明

鈴木 p.97

$f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ **が連続写像**
$\Leftrightarrow \forall Y_1 \subset \mathbb{R}^n$ (Y_1 **が開集合** $\Rightarrow$ **逆像** $f^{-1}(Y_1) = \{x \in \mathbb{R}^m \mid f(x) \in Y_1\}$ **は開集合**)
一方, 写像が連続であることと像が開集合であることとの間には関係はない. つまり, $X_1 \subset \mathbb{R}^m$ **に対して像** $f(X_1) = \{f(x) \in \mathbb{R}^n \mid x \in X_1\}$ **は開集合とは限らない. また像がつねに開集合だからといって連続とは限らない.**

13.2.1

写像 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ **と開集合** $X_1 = (-4, 2) \subset \mathbb{R}^1$, $Y_1 = (-4, 2) \subset \mathbb{R}^1$ **を考える. 像** $f(X_1)$, **と逆像** $f^{-1}(Y_1)$ **を求めよう. それらが開集合であるかどうか考えよう.**

13.2.2

写像 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x+2 & (x < 0) \\ x-2 & (x \geq 0) \end{cases}$ **と開集合** $X_1 = (-3, 1) \subset \mathbb{R}^1$, $Y_1 = (-3, 1) \subset \mathbb{R}^1$ **を考える. 像** $f(X_1)$, **と逆像** $f^{-1}(Y_1)$ **を求めよう. それらが開集合であるかどうか考えよう.**

13.2.3

写像 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} +2 & (x < 0) \\ -2 & (x \geq 0) \end{cases}$ **は** $x = 0$ **において連続でない.** $U \subset \mathbb{R}$ **は開集合だが** $f^{-1}(U) \subset \mathbb{R}$ **は開集合でない, というような** U **をひとつ見つけよう.**

13.2.4

写像 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} +2 & (x < 0) \\ -2 & (x \geq 0) \end{cases}$ **は** $x = 0$ **において連続でない.** $U \subset \mathbb{R}$ **は開集合だが** $f^{-1}(U) \subset \mathbb{R}$ **は開集合でない, というような** U **をひとつ見つけよう.**

13.2.5

写像 $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, $f(x^{(1)},x^{(2)})=\begin{cases}(x^{(1)},x^{(2)}) & (x^{(1)}\le 0)\\ (x^{(1)},2x^{(2)}) & (x^{(1)}>0)\end{cases}$ は $\mathbb{R}^2$ 上でにおいて連続でない. $U\subset\mathbb{R}^2$ は開集合だが $f^{-1}(U)\subset\mathbb{R}^2$ は開集合でない, というような U をひとつ見つけよう.

模範解答を作ろうプロジェクトの近況

模範解答を作ろうプロジェクト!に毎週問題追加を始めました. 追加のタイミングは, 原則として水曜日 13:30 ごろです (追加されたときにメールを受け取る設定が可能です)

スキャンが面倒だった人に朗報. 実習室 1-612(10:00–20:00 に利用可) に, 文書をスキャンして簡単に PDF ファイルとして USB フラッシュメモリに保存することのできる複合機が導入されました.

学外実習に行こう!(来年)

インターンシップのようなものです. 2008 年 8 月 25 日-9 月 12 日に, 学外の公的機関や企業の研究所・事業所・工場などの現場において実務を体験し, 研究・開発・生産・行政などの現場の雰囲気を味わうことができます. 教育委員会などに行った例もあります. 学部共通科目 (2 単位).

学外実習説明会

日時 2008 年 1 月 9 日 (水)5 講時
場所 3-101

プチテストリベンジのお知らせ

補講期間の 2008-01-16(水)1 講時にプチテストリベンジを実施します.

- 参加は任意です.
- 参加希望者はいきなり当日来てください. ただし遅刻は 30 分までです.
- やむをえない理由でプチテストリベンジに参加できなかった人に対しても追試 (プチテストリベンジリベンジ?) は行いません.
- マークシート方式で行い, 過程の記述や部分点はありません.
- 出題範囲はプチテストと同じです.
- 実施時間は 90 分以内です.
- プチテストに参加済みの人がプチテストリベンジにも参加した場合, 高い方の点数から科目の成績のうち 30 点分を算出します.
- プチテストに参加していない人 (公欠の場合, そうでない場合両方とも) がプチテストリベンジに参加した場合, プチテストリベンジの点数から科目の成績のうち 30 点分を算出します (70 点満点の成績を 100/70 倍する方式と比較して点数の高い方ではありません)