集合★位相＋演習

樋口さぶろお[1] 配布: 2008-01-08 Tue 更新: Time-stamp: "2008-01-11 Fri 02:10 JST hig"

14 点列の収束と写像の連続性

今日の目標

1. 点列のイメージを持とう
2. 点列の収束が証明できるようになろう
3. 収束する点列を連続写像で写すとやはり収束することを納得しよう
4. 有界閉集合の点列は収束する部分列を持つことを納得しよう

14.1 点列の定義

説明

鈴木 p.99

$X \subset \mathbb{R}^m$ とする.
X の 点列 とは, 写像 $x : \mathbb{N} \to X$ のこと. $X = \mathbb{R}$ のとき, よく知っている 数列 の定義になる.
$n \in \mathbb{N}$ に対して, $x(n)$ を x_n ってかくと点列 (数列) っぽいでしょ〜
点列を記号 $[x_n]_{n\in\mathbb{N}}$, $[x_n]$ などとかく. $\{x_n\}$ とかく流儀もあるけど集合と点列は違うからちょっとおかしな記法だよね〜(でも昔からよく使われてる).

14.1.1

1. $\mathbb{R}^1$ の点列 $[x_n]_{n\in\mathbb{N}}$, $x_n = 1 - \frac{1}{n}$ を $\mathbb{R}^1$ 上に描こう.
2. $\mathbb{R}^2$ の点列 $[x_n]_{n\in\mathbb{N}}$, $x_n = (0, (-1)^n \frac{1}{n})$ を $\mathbb{R}^2$ 上に描こう.
3. $\mathbb{R}^2$ の点列 $[x_n]_{n\in\mathbb{N}}$, $x_n = (\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2})$ を $\mathbb{R}^2$ 上に描こう.

hig@math.ryukoku.ac.jp, http://hig3.net(講義のページもここからたどれます), へや:1 号館 5 階 502.

14.2　点列の収束

説明

鈴木 p.99 X の点列 $[x_n]$ が点 $a \in \mathbb{R}^m$ に $\boxed{\text{収束}}$ するとは,

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \ \forall k \in \mathbb{N} \ (k \leq N \Rightarrow d(x_k, a) < \epsilon)$$

のこと. つまり, どんな許容誤差 ϵ を持ってこられても, ある達成時期 N があって, N 以降の時点 k の製品はずっと誤差内におさまる.

X の点列 $[x_n]$ が点 $a \in \mathbb{R}^m$ に収束する, ことの略記として

$$a = \lim_{n \to \infty} x_n \qquad \text{や} \qquad x_n \to a \quad (n \to \infty)$$

がある.

14.2.1

次の $\mathbb{R}$ の点列はある点に収束する. 収束する先の点と, (十分小さい)ϵ に対して N をどうとればいいかを答えよう. N はぎりぎりでなく大きめに答えてもいい.

1. $[x_n]_{n \in \mathbb{N}}, \quad x_n = \frac{(-1)^n}{n+3}.$
2. $[x_n]_{n \in \mathbb{N}}, \quad x_n = -\mathrm{e}^{-2/n}.$
3. $[x_n]_{n \in \mathbb{N}}, \quad x_n = -\mathrm{e}^{-2n} \cos(\frac{\pi}{4} n).$
4. $[x_n]_{n \in \mathbb{N}}, \quad x_n = \frac{1}{\log(n+1)}.$

解説　$k > N \Rightarrow d(x_k, a) < \epsilon$ が真になればいいから, N は大きめにとっておいてもよい. 別の言い方をすると $d(x_k, a) < \epsilon$ の十分条件を ($k > N$ という形で) もとめればいい.

14.2.2

次の $\mathbb{R}$ の点列は $a = 1$ に収束するか?

収束するなら ϵ に対して N をどうとればいいか答えよう.

収束しないなら, 収束しないことを示すために, N が存在しないような ϵ をひとつ挙げよう.

1. $[x_n]_{n \in \mathbb{N}}, \quad x_n = (-1)^n.$
2. $[x_n]_{n \in \mathbb{N}}, \quad x_n = \frac{n}{n+1}.$
3. $[x_n]_{n \in \mathbb{N}}, \quad x_n = \begin{cases} 0 & (\exists m \in \mathbb{N} \ n = 10^m) \\ 1 & (\text{それ以外}) \end{cases}$

4. $[x_n]_{n\in\mathbb{N}}, \quad x_n = \begin{cases} 0 & (n = 10^m (m = 0, 1, 2, \ldots, 10)) \\ 1 & (\text{それ以外}) \end{cases}$

14.2.3

次の $\mathbb{R}^2$ **の点列は収束するか?**
収束するなら収束する先の点と, ϵ **に対して** N **をどうとればいいかを答えよう.**
収束しないなら, 例えば $(0, 0)$ **に収束しないことを示すために,** N **が存在しないような** ϵ **をひとつ挙げよう.**

1. $[x_n]_{n\in\mathbb{N}}, \quad x_n = (\mathrm{e}^{-n}, 2\mathrm{e}^{-n}).$
2. $[x_n]_{n\in\mathbb{N}}, \quad x_n = (0, \sin n).$
3. $[x_n]_{n\in\mathbb{N}}, \quad x_n = ((1 + \mathrm{e}^{-n})\cos n, (1 + \mathrm{e}^{-n})\sin n).$
4. $[x_n]_{n\in\mathbb{N}}, \quad x_n = (\mathrm{e}^{-n}\cos n, \mathrm{e}^{-n}\sin n).$

14.3 点列の収束と写像の連続性

説明

鈴木 例題 3.13(p.100)

写像 $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^\ell$ **と** $\mathbb{R}^m$ **の点列** $[x_n]_{n\in\mathbb{N}}$ **を考えると,** $[f(x_n)]_{x\in\mathbb{N}}$ **は** $\mathbb{R}^\ell$ **の点列.**
$[x_n]_{n\in\mathbb{N}}$ **が** $a \in \mathbb{R}^m$ **に収束するとしても,** $[f(x_n)]_{n\in\mathbb{N}}$ **が収束するとは限らない.**
つまり, $x_n \to a\ (n \to +\infty)$ **だからといって** $f(x_n) \to A\ (n \to +\infty)$ **となるとはかぎらない.**
さらに, 収束するとしても一般には $f(x_n) \not\to f(a) \in \mathbb{R}^\ell$ **となるとはかぎらない.**
つまり $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) \neq f(\lim\limits_{n\to+\infty} x_n) \in \mathbb{R}^\ell$ **ということがおこりうる.**
それに対して, 写像 f **が** $x = a$ **で連続ならば** $[f(x_n)]$ **は収束し, さらに** $f(x_n) \to f(a)$
つまり $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = f(\lim\limits_{n\to+\infty} x_n) \in \mathbb{R}^\ell.$

14.3.1

次の写像 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ **はいずれも** $x = 0$ **で不連続である.**
点列 $[x_n]$ **が収束するなら極限** $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$ **と** $f(\lim\limits_{n\to+\infty} x_n)$ **を求めよう.**
点列 $[f(x_n)]$ **が収束するなら極限** $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n)$ **を求めよう.**

1. $f(x) = \begin{cases} 10 & (x < 0) \\ 11 & (x \geq 0) \end{cases}, \qquad x_n = -\frac{1}{n}.$
2. $f(x) = \begin{cases} 10 & (x < 0) \\ 11 & (x \geq 0) \end{cases}, \qquad x_n = \mathrm{e}^{-n}.$

3. $f(x) = \begin{cases} -10 & (x < 0) \\ +10 & (x \geq 0) \end{cases}$, $x_n = -\frac{(-1)^n}{n}$.
4. $f(x) = \begin{cases} -x+1 & (x \geq 0) \\ -x-1 & (x < 0) \end{cases}$, $x_n = (-1)^n(1 - \frac{1}{n})$.

解説 $\lim_{n\to+\infty} f(x_n)$ を求めるには, 一般項 $f(x_n)$ を n で書いて, ただの点列だと思って考える.

14.4　有界閉集合の性質

説明

鈴木 例題 3.16(p.103) $X \subset \mathbb{R}^m$ が有界である $\equiv \exists R > 0\ (X \subset N(O; R))$.

鈴木 p.99 $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ を大小を保つ写像とするとき, $[x_{g(n)}]_{n\in\mathbb{N}}$ を $[x_n]_{n\in\mathbb{N}}$ の部分列という.

- 鈴木 定理 3.10(p.105) X が有界閉集合のとき, X の任意の点列は X の点に収束する部分列を持つ.
- 鈴木 定理 3.11(p.105) $X \neq \emptyset$ のとき, 連続関数 $f : X \to \mathbb{R}$ は X 上で最大値最小値をとる.

この内容は削除しました.

プチテストリベンジのお知らせ

2008-01-16(水)1 講時にプチテストリベンジを実施します.

- 参加は任意です.
- 参加希望者はいきなり当日来てください. ただし遅刻は 30 分までです.
- やむをえない理由でプチテストリベンジに参加できなかった人がいても追試 (プチテストリベンジリベンジ?) は行いません.
- マークシート方式で行い, 過程の記述や部分点はありません.
- 外部記憶ペーパーは使用できません.
- 出題範囲はプチテストと同じです.
- 実施時間は 90 分以内です.
- プチテストに参加済みの人がプチテストリベンジにも参加した場合, 高い方の点数から科目の成績のうち 30 点分を算出します.
- プチテストに参加していない人 (公欠の場合, そうでない場合両方とも) がプチテストリベンジに参加した場合, プチテストリベンジの点数から科目の成績のうち 30 点分を算出します (70 点満点の成績を 100/70 倍する方式と比較して点数の高い方ではありません)

ファイナルトライアルのお知らせ

外部記憶ペーパー使えます．別紙の実施案内をチェックしましょう．出題計画は2008年1月18日ごろに，シミュレーション問題として公開する予定．

目次 前回 次回 今回の解答