応用ベクトル解析∇プチテスト

樋口さぶろお[1] 配布: 2007-06-04 Mon 更新: Time-stamp: ”2007-06-11 Mon 07:53 JST hig”

プチテスト参加案内

1. **全部で 4 問, 60 分です.**
2. 解答用紙の 1 面に 1 問ずつ, 指定された用紙に解答しよう.
3. 過程も答えよう. 最終的な答えが正しいことがわかるような過程を記そう.
4. 問題文に現れない記号を使うときは, 定義を記そう.
5. 2 次元 xy-座標系を使っています. $\boldsymbol{r}=(x,y), \boldsymbol{V}=(V_1,V_2)$.

1

ベクトル場 $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r})=(y^3, 3xy^2+5y^4)$ を考える. パラメタ表示された曲線 C: $\boldsymbol{r}(t)=(-1+2\cos t, 2\sin t)$, $(-\frac{1}{2}\pi \le t \le +\frac{1}{2}\pi)$, 始点 $\boldsymbol{r}(-\frac{1}{2}\pi)$, 終点 $\boldsymbol{r}(+\frac{1}{2}\pi)$ を考える. 線積分 $\displaystyle\int_C \boldsymbol{V}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$ を求めよう.

→ 答案用紙 1

2

ベクトル場 $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r})=(-y,x)$ を考える. パラメタ表示された曲線 C: $\boldsymbol{r}(t)=(t^2,-2t^4)$, $(1\le t\le 2)$, 始点 $\boldsymbol{r}(1)$, 終点 $\boldsymbol{r}(2)$ を考える. 線積分 $\displaystyle\int_C \boldsymbol{V}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$ を求めよう.

→ 答案用紙 2

3

ベクトル場 $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r})=(2x,2y+1)$ を考える. パラメタ表示された曲線 C: $\boldsymbol{r}(t)=(0,0)+(1,3)t$, $(0\le t\le 2)$, 始点 $\boldsymbol{r}(0)$, 終点 $\boldsymbol{r}(2)$ を考える. C の弧長パラメタを s とする.

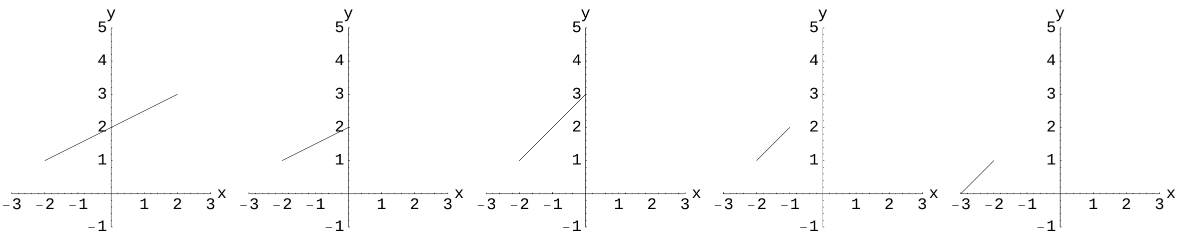
1. 弧長によるパラメタ表示 $\boldsymbol{r}_{\text{弧長}}(s)$ を求めよう.
2. 単位法ベクトル $\boldsymbol{n}(s)$ を求めよう.
3. 線積分 $\displaystyle\int_C \boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}s$ を求めよう.

→ 答案用紙 3

hig@math.ryukoku.ac.jp, http://hig3.net(講義のページもここからたどれます), へや:1 号館 5 階 502.

4

1. パラメタ表示された曲線 C_1: $\boldsymbol{r}(t) = (-2, 1) + (2, 1)t$ $(0 \leq t \leq 2)$ の図を次から選ぼう. → マークシート (6)-1



(a) (b) (c) (d) (e)

2. $(-1, 3)$ と $(3, 2)$ を両端とする線分のパラメタ表示を次から選ぼう. → マークシート (6)-2

   (a) $\boldsymbol{r}(t) = (-1, 3) + (3, 2)t$ $(0 \leq t \leq 1)$

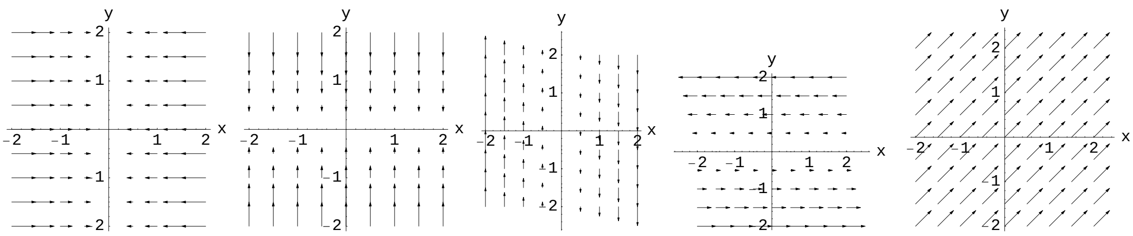
   (b) $\boldsymbol{r}(t) = (3, 2) + (4, -1)t$ $(0 \leq t \leq 1)$

   (c) $\boldsymbol{r}(t) = (3, 2) + (4, -1)t$ $(0 \leq t \leq 2)$

   (d) $\boldsymbol{r}(t) = (-1 + 2t, 3 - \frac{1}{2}t)$ $(0 \leq t \leq 2)$

   (e) $\boldsymbol{r}(t) = (-1 + 4t, 3 - t)$ $(0 \leq t \leq 2)$.

3. ベクトル場 $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r}) = (0, -x)$ の図を次から選ぼう. → マークシート (6)-3



(a) (b) (c) (d) (e)

4. 次の中から, 保存的でないベクトル場を選ぼう. → マークシート (6)-4

   (a) $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r}) = (1, 2)$

   (b) $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r}) = (x^2, y^2)$

   (c) $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r}) = (x^2 + 1, y^2 + 2)$

   (d) $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r}) = (-x^2, y^2)$

   (e) $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r}) = (-y^2, -x^2)$

5. パラメタ表示された曲線 C_1: $\boldsymbol{r}(t) = (t, t^2)$ の $\boldsymbol{r}(-3) = (-3, 9)$ における接線のパラメタ表示を求めよう (過程不要) → マークシート (7)

応用ベクトル解析∇プチテスト略解

樋口さぶろお[2] 配布: 2007-06-04 Mon 更新: Time-stamp: ”2007-06-11 Mon 07:53 JST hig”

1 渦なし条件をチェックすると,

$$\frac{\partial V_2}{\partial x} - \frac{\partial V_1}{\partial y} = 3y^2 - 3y^2 = 0.$$

よって, このベクトル場は保存的である. 実際, $f(\boldsymbol{r}) = 1 \cdot xy^3 + y^5$ とおくと, $\boldsymbol{\nabla} f = \boldsymbol{V}$ となっていることに気づく.

よって,

$$\int_C \boldsymbol{V} \cdot \, \mathrm{d}\boldsymbol{r} = f(\boldsymbol{r}(+\tfrac{1}{2}\pi)) - f(\boldsymbol{r}(-\tfrac{1}{2}\pi)) = f(-1,2) - f(-1,-2) = 24 - (-24) = 48.$$

Remark 積分路を $C_1 : \boldsymbol{r}_1(t) = (-1, t)$, $(-2 \le t \le 2)$ に変更して積分してもけっこう楽です.

$$\int_{C_1} \boldsymbol{V} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_{-2}^{+2} \boldsymbol{V}(\boldsymbol{r}_1(t)) \cdot \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_1}{\mathrm{d}t}(t)\ \mathrm{d}t = \int_{-2}^{+2} V_2(\boldsymbol{r}_1(t))\ \mathrm{d}t. \tag{4.1}$$

講評とコメント 保存的であることを活用しましょう. せっかく保存的であることを確かめておきながら, 与えられたパラメタ表示のままで積分しようとして途中で間違う人がいたのは残念です.

また, 積分路を変えるときは必ず保存的であることを言ってからにしましょう.

一方, 与えられたパラメタ表示のままで積分しきるのは少し大変ですが, その方法で正解に到達した人も何人かいました.

保存的であることを利用して積分路を変えるなら, いちばん楽なのは $C_1 : \boldsymbol{r}_1(t) = (-1, t)$, $(-2 \le t \le 2)$ でしょう. なぜかわざわざ 2 個の部分に分割してる人もいましたが, どんな積分路を選んでもいいんです. 授業でやった例は, x 座標の調整と y 座標の調整に 1 個ずつ使いましたが, この例では x 座標が等しいですからね.

2 このベクトル場は保存的でないので, パラメタ表示に直して積分する.

$$\int_C \boldsymbol{V} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_1^2 \boldsymbol{V}(\boldsymbol{r}(t)) \cdot \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}(t)\ \mathrm{d}t = \int_1^2 (2t^4, t^2) \cdot (2t, -8t^3)\ \mathrm{d}t = \int_1^2 -4t^5\ \mathrm{d}t = -42.$$

hig@math.ryukoku.ac.jp, http://hig3.net(講義のページもここからたどれます), へや:1 号館 5 階 502.

講評とコメント　せっかく保存的でないことをチェックしながら (あるいは何もせずに) 積分路を都合よく変更してしまっている人がいました．問題文が同じでも解き方は同じではありません．データに応じて条件分岐しましょう．

3 b

1. 弧長パラメタ $s = \int_0^t \left(\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t') \right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}(t') \right)^2 \right)^{1/2} \mathrm{d}t' = \int_0^t \sqrt{10}\ \mathrm{d}t' = \sqrt{10}\ t.$
   よって, $s = \frac{1}{\sqrt{10}}t$, $(0 \leq s \leq 2\sqrt{10})$.
   弧長によるパラメタ表示は $\boldsymbol{r}_{弧長}(t) = \frac{1}{\sqrt{10}} \cdot (1, 3)s$, $(0 \leq s \leq 2\sqrt{10})$.
2. $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_{弧長}}{\mathrm{d}s}(s) = \frac{1}{\sqrt{10}} \cdot (1, 3)$. $\boldsymbol{n}(s) = \frac{1}{\sqrt{10}} \cdot (3, -1)$.
3. $$\int_C \boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{n}\ \mathrm{d}s = \int_0^{2\sqrt{10}} \left(2 \cdot \frac{1}{\sqrt{10}}s, 2 \cdot \frac{3}{\sqrt{10}}s + 1 \right) \cdot \frac{1}{\sqrt{10}}(3, -1)\ \mathrm{d}s = \int_0^{2\sqrt{10}} \frac{-1}{\sqrt{10}}\ \mathrm{d}s = -2.$$

講評とコメント　誇張でなく弧長です．

$\boldsymbol{n}$ を作るのに $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$ でなく $\boldsymbol{r}$ を回転している人が時々いました．法ベクトルは接ベクトルと直交するんですよね．

この問は積分路が原点から出る線分という簡単な形なので, 弧長によるパラメタ表示を求めるところや $\boldsymbol{n}$ を求めるところで, おかしなやり方をしても正しい答えが出てしまっているケースが一定比率ありました．もういちどやり方を確認しましょう．

4

1. (a)
2. (d)
3. (c)
4. (e)
5. $\boldsymbol{r}_{接線}(t) = (-3, 9) + (1, -6)t$

プチテストのスコアは e-learning サイト `https://f5lms.media.ryukoku.ac.jp` でお知らせします．スコアが入力された際には, メールアドレス `t060`$nnnx$`@mail.ryukoku-u.ac.jp` に通知されます．