応用ベクトル解析∇ファイナルトライアル

樋口さぶろお[1]　配布: 2007-07-23 Mon 更新: Time-stamp: "2007-09-04 Tue 15:48 JST hig"

ファイナルトライアル参加案内

両面です．全部で 5 問です．外部記憶ペーパー作成 10 分＋答案作成 80 分です.

1. 解答用紙の 1 面に 1 問ずつ, 指定された用紙に解答しよう.
2. 過程も答えよう. 最終的な答えが正しいことがわかるような過程を記そう.
3. 問題文に現れない記号を使うときは, 定義を記そう.
4. 3 次元右手系 xyz-座標系を使っています. $\boldsymbol{r} = (x, y, z), \boldsymbol{V} = (V_1, V_2, V_3)$.

1

ベクトル場 $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r}) = (y, xy^3, yz)$, スカラー場 $f(\boldsymbol{r}) = x + yz^2 + xyz$ を考える.

1. $\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{V}$ を求めよう.
2. $\boldsymbol{\nabla} f$ を求めよう.
3. 次の 4 つを, スカラー場, ベクトル場, 間違った式に分類しよう (具体的な形は求めなくてよい)
   (a) $\boldsymbol{\nabla} \cdot (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{V})$.
   (b) $(\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{V})\, (\boldsymbol{\nabla} f)$.
   (c) $\boldsymbol{\nabla} \times (\boldsymbol{\nabla} \times f)$.
   (d) $\boldsymbol{\nabla} \times (\boldsymbol{\nabla} f)$.

→ $\boxed{\text{マークシート (7)}}$

$\boxed{\text{裏に進もう}}$

hig@math.ryukoku.ac.jp, http://hig3.net(講義のページもここからたどれます), へや:1 号館 5 階 502.

2

ベクトル場 $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r}) = (2x+z^3, 6y, 3xz^2)$ とパラメタ表示された曲線 $C : \boldsymbol{r}(t) = (t^2, 2t, -t)$ $(-2 \leq t \leq 0)$ を考える．ただし始点 $\boldsymbol{r}(-2)$, 終点 $\boldsymbol{r}(0)$ とする．線積分 $\displaystyle\int_C \boldsymbol{V} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$ を求めよう．

→ マーク シート (9)

3

パラメタ表示された曲面 $S : \boldsymbol{r}(s,t) = (2s\cos t, 4s\sin t, s^2\sin(2t))$ を考える． 大注意 z 成分だけ $\sin(\mathbf{2}t)$ です．

1. 曲面 S の，点 $\boldsymbol{r}(2, \frac{1}{4}\pi) = (2\sqrt{2}, 4\sqrt{2}, 4)$ における単位法ベクトル $\boldsymbol{n}$ を求めよう．
2. 曲面 S の，点 $\boldsymbol{r}(2, \frac{1}{4}\pi) = (2\sqrt{2}, 4\sqrt{2}, 4)$ における接平面の方程式またはパラメタ表示を求めよう (どちらか好きな方ひとつだけでよい).

→ マークシート (11)

4

パラメタ表示された曲面 $S : \boldsymbol{r}(s,t) = (t, 2t, s^2)$, $(-4 \leq s \leq 0, 0 \leq t \leq 2)$, ベクトル場 $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r}) = (yz, xz, \mathrm{e}^{x\sin y} + \mathrm{e}^{y\cos x})$ を考える．曲面 S の単位法ベクトルで y 成分が正であるものを $\boldsymbol{n}$ とする．面積分

$$\int_S \boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{n}\, \mathrm{d}S$$

を求めよう．

→ マークシート (13)

5

パラメタ表示された曲面 $S : \boldsymbol{r}(s,t) = (0, s\cos t, s\sin t)$ $(2 \leq s \leq 3, 0 \leq t < 2\pi)$, ベクトル場 $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r}) = (\mathrm{e}^{-x^2y}, \sqrt{y^2+z^2} \cdot z, -\sqrt{y^2+z^2} \cdot y)$ を考える．面積分

$$\int_S (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{V}) \cdot \boldsymbol{n}\, \mathrm{d}S$$

を，ストークスの定理を使って線積分に書き直して計算しよう．ここで $\boldsymbol{n}$ は S の単位法ベクトルで x 成分が正のものである．

→ マークシート (15)

問題はおしまい．アンケートと学籍番号欄に記入しよう．

応用ベクトル解析∇ファイナルトライアル略解

樋口さぶろお[2] 配布: 2007-07-23 Mon 更新: Time-stamp: "2007-09-04 Tue 15:48 JST hig"

1

1. $\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{V} = 0 + 3xy^2 + y$.
2. $\boldsymbol{\nabla} f = (1 + yz, z^2 + xz, 2yz + xy)$.
3. (a): スカラー場, (b),(d):ベクトル場, 間違った式:(c)

講評　3. は (小さい) 括弧から順に計算していけばいいですね. 1.3.(a) なら, $\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{V}$ は回転でベクトルだから, $\boldsymbol{\nabla} \cdot (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{V})$ はベクトル場の発散でスカラー, とかね. (b) は今回で最難関の問題? $\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{V}$ はスカラー, ∇f はベクトルで, ベクトルのスカラー倍でベクトル.

2

$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{V} = (0, 3z^2 - 3z^2, 0) = (0, 0, 0)$. よって保存的. 超ラッキー!.

山勘により $f(\boldsymbol{r}) = x^2 + 3y^2 + xz^3$ とおくと, $\boldsymbol{\nabla} f = \boldsymbol{V}$ が成立している (このことからも保存的であることがわかる). よって,

$$\int_C \boldsymbol{V} \cdot \, \mathrm{d}\boldsymbol{r} = f(\boldsymbol{r}(0)) - f(\boldsymbol{r}(-2)) = 0 - 96 = -96.$$

別の計算方法として, 素直に線積分マーク 1 の手順を踏んで,

$$\int_{-2}^{0} \boldsymbol{V}(\boldsymbol{r}(t)) \cdot \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}(t) \, \mathrm{d}t$$

を計算してもそれほど大変でなく同じ結論を得る.

講評　せっかく保存的で超ラッキーであることを示しながら, 活用していない人が多かったです…まあふつうに線積分してもそんなにたいへんじゃないんだけど.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + z^3$$

から

$$f(x, y, z) = x^2 + xz^3 + C_1(y) + C_2(z)$$

とおいている人がいたけど, C_1, C_2 に分離するとは限りません. $C(y, z)$ とおかないといけないね.

---

hig@math.ryukoku.ac.jp, http://hig3.net(講義のページもここからたどれます), へや:1 号館 5 階 502.

3

1.

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial s}(2, \tfrac{1}{4}\pi) \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial t}(2, \tfrac{1}{4}\pi) = (\sqrt{2}, 2\sqrt{2}, 4) \times (-2\sqrt{2}, 4\sqrt{2}, 0) = 8\sqrt{2}(-2, -1, \sqrt{2}).$$

これを単位ベクトルに直すと

$$\boldsymbol{n} = \pm\frac{1}{\sqrt{7}}(-2, -1, \sqrt{2}).$$

2. パラメタ表示は

$$\boldsymbol{r}_{接平面}(s, t) = (2\sqrt{2}, 4\sqrt{2}, 4) + (\sqrt{2}, 2\sqrt{2}, 4)s + (-2\sqrt{2}, 4\sqrt{2}, 0)t.$$

方程式は, この式から s, t を消去するか, $(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}(2, \frac{1}{4}\pi)) \cdot \boldsymbol{n} = 0$ より

$$\begin{aligned}(-2)(x - 2\sqrt{2}) + (-1)(y - 4\sqrt{2}) + \sqrt{2}(z - 4) =& 0\\ -2x - y + \sqrt{2}z =& -4\sqrt{2}\end{aligned}$$

講評　うーん, ちょっと係数が複雑になってしまった. ごめん.

4

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial s}(s, t) \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial t}(s, t) = (0, 0, 2s) \times (1, 2, 0) = (-4s, 2s, 0).$$

単位法ベクトルはこの ±(正の定数) 倍だが, 範囲 $-4 \leq s \leq 0$ と, y 成分 $2s$ が正という条件から, − のほうをとる. よって,

$$\begin{aligned}I &= \int_S \boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{n}\,\mathrm{d}S\\ &= -\int_0^2 \left\{\int_{-4}^0 \boldsymbol{V}(\boldsymbol{r}(s, t)) \cdot \left(\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial s}(s, t) \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial t}(s, t)\right) \mathrm{d}s\right\} \mathrm{d}t\\ &= -\int_0^2 \left\{\int_{-4}^0 (2ts^2, ts^2, \boxed{\text{計算したくない}}) \cdot (-4s, 2s, 0)\,\mathrm{d}s\right\} \mathrm{d}t\\ &= \cdots = -768.\end{aligned}$$

講評　ガウスの定理使おうとしてた人がいたけど, あれは S が閉曲面のときじゃなきゃ使えないよ.

5

境界 ∂S は 2 つの部分からなる.

$$\begin{aligned}C_2: \quad \boldsymbol{r}_2(t) =& (0, 2\cos t, 2\sin t),\\ C_3: \quad \boldsymbol{r}_3(t) =& (0, 3\cos t, 3\sin t)\end{aligned}$$

ともに $0 \le t < 2\pi$ だが, C_2 の始点は $\boldsymbol{r}(2\pi)$, C_3 の始点は $\boldsymbol{r}(0)$. ストークスの定理により,

$$
\begin{aligned}
I &= \int_S (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{V}) \cdot \boldsymbol{n}\, \mathrm{d}S \\
&= \int_{C_2} \boldsymbol{V} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} + \int_{C_3} \boldsymbol{V} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} \\
&= \int_{2\pi}^{0} (\boxed{\text{計算したくない}}, 2 \cdot 2 \sin t, -2 \cdot 2 \cos t) \cdot (0, -2 \sin t, 2 \cos t)\, \mathrm{d}t \\
&\quad + \int_{0}^{2\pi} (\boxed{\text{計算したくない}}, 3 \cdot 3 \sin t, -3 \cdot 3 \cos t) \cdot (0, -3 \sin t, 3 \cos t)\, \mathrm{d}t \\
&= -(27 - 8) 2\pi = -38\pi.
\end{aligned}
$$

講評　ガウスの定理使おうとしてた人がいたけど, あれは S が閉曲面のときじゃなきゃ使えないよ.

この曲面は yz 平面上にあるから, $y \to x$, $z \to y$ と名前をつけかえて, $[\boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{V}] = (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{V})_z$ とみなしてグリーンの定理をつかってやることもできますね. 間違えやすいのでお薦めはしないけど.

お知らせ

ごめんなさい. 採点はあまり高速でできなそうです.

ファイナルトライアルのスコアは e-learning サイト `https://f5lms.media.ryukoku.ac.jp` でお知らせします. スコアが入力された際には, メールアドレス `t060`*nnnx*`@mail.ryukoku-u.ac.jp` に通知されます.

ただし, e-learning サイトは 2007-08-08 から 2007-09 初旬まで停止しますので, これ以前に成績を掲載することをめざしていますが, 間に合うかなあ (弱気)

`http://hig3.net`